

1. Предел и непрерывность функций одной переменной

1. ОБЩЕМАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

Высказывания
Способы построения высказываний
Обратное утверждение
Предложения с переменными и кванторы
Запись высказываний с кванторами
Отрицание
Теорема и доказательство

2. Вещественные числа

Вещественное число — десятичная дробь
Для чего нужна полнота
Теорема 1 (Дедекинда о полноте числовой прямой)

10 27 5 22 Теорема 2 (принцип вложенных отрезков)

Доказательство
Важно, что отрезок

1 20 9 Определение верхней границы

2 21 10 Определение наибольшего элемента

В чем разница между верхней границей и наибольшим элементом

11 28 6 23 Теорема 3 (о существовании наименьшей верхней границы)

Доказательство

3 22 11 Определение точной верхней границы

Определение расширенной числовой прямой

12 29 7 24 Теорема 3 (о точных границах в \mathbb{R})

Доказательство

1 9 17 25 Теорема 4 (критерий точной верхней границы)

Доказательство

3. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА

Определение последовательности

4 23 12 Определение предела последовательности

Как понимать определение предела последовательности

О единственности предела

27 Определение последовательности, стремящейся к $\pm\infty$

3.2. ПРЕДЕЛ, НЕРАВЕНСТВО И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

13 30 8 25 Теорема 5 (о пределе и неравенстве)

Док-во

14 1 9 26 Теорема 6 (о зажатой последовательности)

Док-во

15 2 10 27 Теорема 7 (об ограниченности сходящейся последовательности)

Доказательство

16 3 11 28 Теорема 8 (о бесконечно малых)

Доказательство

17 4 12 29 Теорема 9 (о пределе и арифметических операциях)

Доказательство (для суммы и произведения)

3.3. ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ЧАСТИЧНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

5 24 13 28 Определение подпоследовательности и частичного предела

Комментарии и примеры

18 5 13 30 Теорема 10 (о пределе подпоследовательности)

Доказательство

2 10 18 26 Теорема 11 (Больцано — Вейерштрасса о подпоследовательности)

Доказательство

3.4. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ

19 6 14 Теорема 12 (Вейерштрасса о монотонной последовательности)

Доказательство

6 25 14 29 Определение фундаментальной последовательности

3 11 19 27 Теорема 13 (критерий Коши)

Доказательство

7 26 15 30 Отрицание условия Коши

4. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

8 27 16 Определение предельной точки

Смысл определения

Предельная точка может как принадлежать так и не принадлежать множеству

Термин «точка сгущения» для конечной точки. Термин «предельная точка» универсальный

9 28 17 Определение конечного предела функции в точке сгущения

Примеры

10 29 18 Определение односторонних пределов функции в точке сгущения

Примеры

Если односторонние пределы равны, то существует обычный предел

11 30 19 Определение конечного предела функции в бесконечной точке

Предел последовательности — частный случай предела функции

12 1 20 Определение бесконечного предела в точке сгущения

13 2 21 Определение окрестности и проколотой окрестности

14 3 22 Определение предельной точки на языке окрестностей

15 4 23 Определение предела функции на языке окрестностей

4 12 20 28 Теорема 14 (эквивалентность определений предела по Гейне и по Коши)

Доказательство

Теорема 5' (о предельном переходе в неравенстве)

Следствие (о единственности предела)

Теорема 9' (о пределе и алгебраических операциях)

Теорема 6' (о зажатой функции)

Теорема 13' (критерий Коши для функций)

20 7 15 Теорема 15 (о пределе композиции)

Доказательство

5. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ И ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Замечание (о сложном проценте)

5 13 21 29 Теорема 16 (о существовании предела последовательности $(1 + x/n)^n$)

Доказательство

16 5 24 Определение функции $\exp(x)$ и числа e

21 8 16 Теорема 17 (о свойствах $\exp(x)$ и замечательном пределе)

Доказательство (замечательного предела)

Определение натурального логарифма

22 9 17 Теорема 19 (о свойствах натурального логарифма)

Доказательство

23 18 1 Теорема 20 (замечательный предел для степенной функции)

Доказательство

24 19 2 Теорема 21 (первый замечательный предел)

Доказательство

6. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СРАВНЕНИЯ

17 6 25 Определение асимптотических сравнений: o -малое и O -большое

Замечание. o -малое и O -большое — это некоторые функции ...

Замечание. $o(1)$ — бесконечно малая, $O(1)$ — локально ограниченная функция

Пример. $x^2 = o(x)$, $x \rightarrow 0$

Пример. $x = o(x^2)$, $x \rightarrow +\infty$

Лекция 9 / 30.09.2013

25 20 3 Теорема 22 (о преобразовании выражений с o -малыми и O -большими)

Доказательство

6 14 22 30 Теорема 23 (о сравнении степенной, показательной и логарифмической функций)

Доказательство

18 7 Определение главной части

Комментарии к определению

26 21 4 Теорема 24 (о главных частях элементарных функций)

Доказательство

Лекция 10 / 3.10.2013

7. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

19 8 26 Определение непрерывной функции

Комментарии к определению непрерывной функции

Классификация разрывов

Теорема 9'' (о непрерывности суммы, разности, произведения, отношения)

Теорема 15' (о непрерывности композиции)

7 15 Теорема 25 (Больцано — Коши о промежуточных значениях)

Доказательство

8 16 Теорема 26 (Вейерштрасса о наибольшем и наименьшем значениях)

Доказательство