

III. Интеграл**1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА РИМАНА И ЕГО СВОЙСТВА**1 11 21 **Определение разбиения**1 11 21 **Определение интеграла Римана***Как понимать предел интегральных сумм**О происхождении обозначения*2 12 22 **Определение сумм Дарбу**2 12 22 **Теорема 1 (критерий Дарбу)****Теорема 2 (об интегрируемости (кусочно) непрерывной функции и монотонной функции)***Ограниченность функции — необходимое условие интегрируемости***Теорема 3 (о линейности и аддитивности интеграла)**

Лекция 19 / 7.11.2013

*Пример монотонной функции с бесконечным числом разрывов**Пример неинтегрируемой функции***Теорема 4 (о монотонности интеграла)**1 11 21 **Теорема 5 (первая теорема о среднем)**1 11 21 **Док-во***Геометрический смысл теоремы о среднем в случае $g(x) = 1$* *Оценивание интегралов при помощи теоремы о среднем***2. ИНТЕГРАЛ И ПЕРВООБРАЗНАЯ***Об интеграле в случае $a > b$* 2 12 22 **Теорема 6 (об интеграле и первообразной)**2 12 22 **Док-во**3 13 23 **Теорема 7 (формула Ньютона — Лейбница)**3 13 23 **Док-во***Формула Ньютона — Лейбница — средство вычисления интегралов*4 14 24 **Теорема 8 (формула Тейлора с интегральным остаточным членом)**4 14 24 **Док-во**

Лекция 20 / 11.11.2013

*Следствие. Остаточный член в форме Лагранжа***3. НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ**3 13 23 **Определение несобственного интеграла для бесконечной и конечной точки***Замечание (о сходимости)**Замечание (о значении несобственного интеграла и формуле Ньютона — Лейбница)**Замечание (о причинах сходимости)*4 14 24 **Определение абсолютной и условной сходимости несобственного интеграла**5 15 25 **Теорема 9 (критерий Коши сходимости несобственного интеграла)**5 15 25 **Док-во**6 16 26 **Теорема 10 (о сходимости абсолютно сходящегося интеграла)**6 16 26 **Док-во**7 17 27 **Теорема 11 (об интегрировании основных особенностей)**7 17 27 **Док-во**8 18 28 **Теорема 12 (мажорантный признак и теорема сравнения для несобственных интегралов)**8 18 28 **Док-во**

Лекция 21 / 14.11.2013

*Примеры на мажорантный признак и теорему сравнения*9 19 29 **Теорема 13 (признаки Абеля и Дирихле сходимости несобственного интеграла)**9 19 29 **Док-во****Пример ($\int \sin x/x dx$)***Случай нескольких особенностей**Сходимость в смысле главного значения*

-
4. ЭЙЛЕРОВЫ ИНТЕГРАЛЫ: ГАММА-ФУНКЦИЯ И БЕТА-ФУНКЦИЯ
5 15 25 **Определение Γ -функции и B -функции**
10 20 30 **Теорема 14 (об основных свойствах Γ -функции и B -функции)**
10 20 30 **Док-во**
График гамма-функции
Формула Стирлинга
Связь бета-функции с биномиальными коэффициентами
Пример. Вычисление интеграла Эйлера — Пуассона
5. АДДИТИВНЫЕ ФУНКЦИИ И ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛА
Замечание об аддитивности площади и интеграла
Площадь криволинейной трапеции
Пример. Площадь эллипса
- 6 16 26 **Площадь фигуры в полярных координатах**

- 7 17 27 **Масса стержня**
7 17 27 **Центр масс стержня**
Второй момент и момент инерции стержня
- 8 18 28 **Объем тел вращения**
8 18 28 **Пример. Объем шара**
- 9 19 29 **Гладкая кривая, длина кривой**
1 11 21 **Теорема 15 (о длине кривой)**
1 11 21 **Доказательство**
Длина графика
- 9 19 29 **Длина кривой в полярных координатах**
2 12 22 **Пример. Длина дуги эллипса. Эллиптический интеграл второго рода**

Глава IV. Числовые ряды

1. СХОДИМОСТЬ РЯДА
10 20 30 **Определение ряда, частичных сумм, сходящегося ряда**
3 13 23 **Теорема 1 (критерий Коши сходимости числового ряда)**
3 13 23 **Док-во**
4 14 24 **Теорема 2 (необходимое условие сходимости ряда)**
4 14 24 **Док-во**
У несобственного интеграла аналогичного условия нет
- 1 11 21 **Определение абсолютно и условно сходящегося ряда**
5 15 25 **Теорема 3 (абсолютно сходящийся ряд сходится)**
5 15 25 **Док-во**
2. АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДОВ
6 16 26 **Теорема 4 (теорема сравнения для рядов)**
6 16 26 **Док-во**
7 17 27 **Теорема 5 (интегральный признак сходимости ряда)**
7 17 27 **Док-во**
8 18 28 **Теорема 6 (о сходимости эталонных рядов)**
8 18 28 **Док-во**
Пример (гармонический ряд расходится)
9 19 29 **Теорема 7 (признак Коши сходимости ряда)**
9 19 29 **Док-во**

10 20 30 Теорема 8 (признак Даламбера сходимости ряда)

10 20 30 Док-во

Пример $\sum x^n/n^n$

Пример $\sum x^n/n^s$

Ряды Тейлора элементарных функций

3. УСЛОВНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДОВ

5 15 25 Теорема 9 (признаки Абеля и Дирихле сходимости ряда)

5 15 25 Док-во

Следствие (признак Лейбница)

Пример $(\sum \sin nx/n)$

Пример $(\sum (-1)^n/n)$

Глава V. Дифференциальное исчисление функций многих переменных

1. \mathbb{R}^n КАК НОРМИРОВАННОЕ ПРОСТРАНСТВО

Замечание о модуле

Определение арифметического пространства \mathbb{R}^n и евклидова расстояния в нем

Примеры расстояний: Нью-Йорк, Москва, рукопожатия

2 12 22 Определение метрики и метрического пространства

2 12 22 Определение нормы и нормированного пространства

Замечание норма определяет метрику

2 12 22 Определение основных норм и метрик в \mathbb{R}^n : l_1, l_2, l_∞, l_p

Связь стандартного скалярного произведения с евклидовой нормой

1 11 21 Теорема 1 (о связи норм l_1, l_2, l_∞)

1 11 21 Док-во

Определение открытого и замкнутого шара нормы

Примеры (шары в разных нормах в \mathbb{R}^2)

Теорема 2 (об эквивалентности норм в \mathbb{R}^n)

2 12 22 Теорема 3 (неравенства Коши — Буняковского и Минковского для l_2)

2 12 22 Док-во

Определение предела последовательности в \mathbb{R}^n

Замечание о независимости сходимости от нормы

Замечание о покомпонентной сходимости

3 13 23 **Определение внутренней, внешней, граничной и предельной точек, внутренности, внешности, границы и замыкания**

3 13 23 **Примеры. Открытый и замкнутые шары, сфера, все пространство \mathbb{Q}^n**

4 14 24 **Определение открытого и замкнутого множества**

4 14 24 **Примеры. Открытый и замкнутые шары, сфера, все пространство \mathbb{Q}^n**

5 15 25 **Определение ограниченного множества**

5 15 25 **Определение компакта**

5 15 25 **Определение связного множества и области**

Замечание о теореме Больцано — Коши (промежуток \rightarrow область)

Замечание о теореме Вейерштрасса (отрезок \rightarrow компакт)

2. ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

0 **Определение линейного отображения**

Примеры линейного отображения:

1. Умножение на матрицу

2. Умножение на вектор

3. Скалярное произведение и норма

4. Дифференцирование в пространстве полиномов

5. Определенный интеграл

Матрица линейного отображения

Замечание. Оператор отождествляется с матрицей в случае \mathbb{R}^n и стандартного базиса

Пример. дифференцирование в пространстве полиномов

3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

6 16 26 **Определение дифференциала**

Замечание о покомпонентной записи

Замечание о внутренней точке в определении

7 17 27 **Определение частной производной и матрицы Якоби**

Замечание о замороженных координатах

Пример частной производной

Лекция 29 / 12.12.2013

3 13 23 **Теорема 4 (о связи дифференциала с частными производными)**

3 13 23 **Доказательство**

Пример недифференцируемой функции с частными производными

О записи $df(x) = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$

8 18 28 **Определение градиента функции**

8 18 28 **Вид градиента в декартовых координатах**

8 18 28 **Геометрический смысл градиента**

Теорема 5 (о дифференцировании и алгебраических операциях)

9 19 29 **Теорема 6 (о дифференцировании композиции, цепное правило)**

9 19 29 **Док-во**

4. СТАРШИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

9 19 29 **Определение старших производных**

Пример. Смешанные производные $f(x, y) = \arctg(y/x)$.

Лекция 30 / 16.12.2013

Теорема 7 (о перестановочности частных производных)

Без док-ва

9 19 29 **Определение пространства $C^k(\Omega)$**

6 16 26 **Теорема 8 (формула Тейлора)**

6 16 26 **Док-во**

6 16 26 **Определение второго дифференциала и матрицы Гессе**

5. ЛОКАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

10 20 30 **Определение локального экстремума**

10 20 30 **Определение критической точки**

4 14 24 **Теорема 9 (необходимое условие локального экстремума)**

4 14 24 **Док-во**

Лекция 31 / 19.12.2013

7 17 27 10 20 30 **Теорема 10 (достаточное условие локального экстремума)**

7 17 27 10 20 30 **Док-во**

Пример полуопределенной формы

8 18 28 **Метод наименьших квадратов**