
1. Предел и непрерывность функций одной переменной

1. ОБЩЕМАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

- Высказывания*
- Способы построения высказываний*
- Обратное утверждение*
- Предложения с переменными и кванторы*
- Запись высказываний с кванторами*
- Отрицание*
- Теорема и доказательство*

2. Вещественные числа

- Вещественное число — десятичная дробь*
- Для чего нужна полнота*
- Теорема 1 (Дедекинда о полноте числовой прямой)**
- Теорема 2 (принцип вложенных отрезков)**
- Доказательство**
- Важно, что отрезок*
- Определение верхней границы**
- Определение наибольшего элемента**
- В чем разница между верхней границей и наибольшим элементом*
- Теорема 3 (о существовании наименьшей верхней границы)**
- Доказательство**

- Определение точной верхней границы**
- Определение расширенной числовой прямой**
- Теорема 3̄ (о точных границах в $\bar{\mathbb{R}}$)**
- Доказательство**
- Теорема 4 (критерий точной верхней границы)**
- Доказательство**

3. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА

- Определение последовательности**
- Δ **Определение предела последовательности**
 - Как понимать определение предела последовательности*
 - О единственности предела*
- Определение последовательности, стремящейся к $\pm\infty$**

3.2. ПРЕДЕЛ, НЕРАВЕНСТВО И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

- Теорема 5 (о пределе и неравенстве)**
- Док-во**
- Теорема 6 (о зажатой последовательности)**

Док-во

Теорема 7 (об ограниченности сходящейся последовательности)

Доказательство

Теорема 8 (о бесконечно малых)

Доказательство

Теорема 9 (о пределе и арифметических операциях)

Доказательство (для суммы и произведения)

3.3. Подпоследовательности и частичные пределы

△ **Определение подпоследовательности и частичного предела**

Комментарии и примеры

Теорема 10 (о пределе подпоследовательности)

Доказательство

△ **Теорема 11 (Больцано — Вейерштрасса о подпоследовательности)**

Доказательство

3.4. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ

Теорема 12 (Вейерштрасса о монотонной последовательности)

Доказательство

△ **Определение фундаментальной последовательности**

△ **Теорема 13 (критерий Коши)**

Доказательство

Отрицание условия Коши

4. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Определение предельной точки

Смысл определения

Предельная точка может как принадлежать так и не принадлежать множеству

Термин «точка сгущения» для конечной точки. Термин «предельная точка» универсальный

△ **Определение конечного предела функции в точке сгущения**

Примеры

Определение односторонних пределов функции в точке сгущения

Примеры

Если односторонние пределы равны, то существует обычный предел

Определение конечного предела функции в бесконечной точке

Предел последовательности — частный случай предела функции

Определение бесконечного предела в точке сгущения

Определение окрестности и проколотовой окрестности

Определение предельной точки на языке окрестностей

Определение предела функции на языке окрестностей

Теорема 14 (эквивалентность определений предела по Гейне и по Коши)

Доказательство

Теорема 5' (о предельном переходе в неравенстве)

Следствие (о единственности предела)

Теорема 9' (о пределе и алгебраических операциях)

Теорема 6' (о зажатой функции)

Теорема 13' (критерий Коши для функций)

Теорема 15 (о пределе композиции)

Доказательство

5. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ И ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Замечание (о сложном проценте)

Теорема 16 (о существовании предела последовательности $(1 + x/n)^n$)

Доказательство

△ **Определение функции $\exp(x)$ и числа e**

Теорема 17 (о свойствах $\exp(x)$ и замечательном пределе)

Доказательство (замечательного предела)

Определение натурального логарифма

Теорема 18 (о свойствах натурального логарифма)

Доказательство

Теорема 19 (замечательный предел для степенной функции)

Доказательство

Теорема 20 (первый замечательный предел)

Доказательство

6. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СРАВНЕНИЯ

△ **Определение асимптотических сравнений: o -малое и O -большое**

Замечание. o -малое и O -большое — это некоторые функции ...

Замечание. $o(1)$ — бесконечно малая, $O(1)$ — локально ограниченная функция

Пример. $x^2 = o(x)$, $x \rightarrow 0$

Пример. $x = o(x^2)$, $x \rightarrow +\infty$

Теорема 21 (о преобразовании выражений с o -малыми и O -большими)

Доказательство

△ **Теорема 22** (о сравнении степенной, показательной и логарифмической функций)

Доказательство

△ **Определение главной части**

Комментарии к определению

Теорема 23 (о главных частях элементарных функций)

Доказательство

7. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

△ **Определение непрерывной функции**

Комментарии к определению непрерывной функции

Классификация разрывов

Замечание о непрерывности элементарных функций

△ Теорема 24 (Больцано — Коши о промежуточных значениях)

Доказательство

Замечания о теореме

△ Теорема 25 (Вейерштрасса о наибольшем и наименьшем значениях)

Доказательство

Замечания о теореме

II. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

1. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ

△ Определение производной функции

Физический смысл производной (мгновенная скорость)

Геометрический смысл производной (угловой коэффициент касательной, касательная — предельное положение секущей)

Линейная функция и аффинная функция, вид линейной функции в \mathbb{R}

Определение дифференциала

Задача наилучшего линейного приближения. Геометрическая интерпретация дифференциала

Дифференциал — главная линейная часть приращения

Теорема 1 (о связи производной с дифференциалом)

Док-во

Что такое dx ?

Символика $df = f'(x_0)dx$

Дифференцируемая функция непрерывна

Теорема 2 (о дифференцировании и алгебраических операциях)

Док-во (для произведения)

*Теорема 3 (о производной композиции)

Док-во

*Теорема 4 (о производной обратной функции)

Пок-во

Док-во

Теорема 5 (о производных элементарных функций)

Док-во

2. ПРИРАЩЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Определение локального экстремума

Определение внутренней точки промежутка

Теорема 6 (теорема Ферма о необходимых условиях экстремума)

Док-во

Теорема 7 (теорема Ролля)

Док-во

Геометрическая интерпретация, примеры

Обновлено 29 декабря 2013 г.

△ Теорема 8 (теорема Лагранжа о конечном приращении)

Док-во

Об оценке приращения функции

Теорема 9 (теорема Коши о конечном приращении)

Док-во

3. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Определение старших производных

Лекция 13 / 14.10.2013

△ *Теорема 10 (формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа)

Док-во

△ Теорема 11 (формула Тейлора с остатком в форме Пеано)

Док-во

Замечание о различных формах остаточного члена

Формула Тейлора и ряд Тейлора

△ Теорема 12 (формула Тейлора для основных элементарных функций)

Док-во

Лекция 14 / 17.10.2013

Пример (конечно-разностные приближения производных)

Пример (приближение $\sin x$ полиномом $x - x^3/6 + x^5/120$)

`wolframalpha.com Plot[{Sin[x], x-x3/6+x5/120}, {x,-5,5}]`

`wolframalpha.com Series[Log[Cos[x]], {x,0,2}]`

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ МЕТОДАМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

*Теорема 13 (достаточное условие локального экстремума)

Док-во

Теорема 14 (о монотонности)

Док-во

Определение выпуклой функции

Лекция 15 / 21.10.2013

Геометрическая интерпретация выпуклости

*Теорема 15 (критерий выпуклости)

Док-во

Определение асимптоты

О нахождении асимптот

Теорема 16 (правила Бернулли — Лопиталья)

Без доказательства

5. ПЕРВООБРАЗНАЯ

△ Определение первообразной и обобщенной первообразной

Пример с обобщенной первообразной ($F(x) = |x|$)

Теорема 17 (о множестве первообразных)

Доказательство

Почему первообразную рассматривают на промежутке?

Теорема 18 (о линейности первообразной)

Теорема 19 (интегрирование по частям для первообразной)

Доказательство

Пример на интегрирование по частям ($\int \ln x dx$)

Теорема 20 (замена и подстановка для первообразной)

Доказательство

Пример на замену ($\int \frac{\ln x}{x} dx$)

Функции $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$ и их основные свойства

Пример на подстановку ($\int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}$)

***Теорема 21 (о первообразной рациональной функции)**

Доказательство

6. ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

О задачах оптимизации

Пример (закон преломления)

Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Пример (охлаждение тел)

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

III. Интеграл

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА РИМАНА И ЕГО СВОЙСТВА

△ **Определение разбиения**

△ **Определение интеграла Римана**

Как понимать предел интегральных сумм

О происхождении обозначения

Определение сумм Дарбу

Теорема 1 (критерий Дарбу)

Теорема 2 (об интегрируемости (кусочно) непрерывной функции и монотонной функции)

Ограниченность функции — необходимое условие интегрируемости

Теорема 3 (о линейности и аддитивности интеграла)

Пример монотонной функции с бесконечным числом разрывов

Пример неинтегрируемой функции

Теорема 4 (о монотонности интеграла)

△ Теорема 5 (первая теорема о среднем)

Док-во

Геометрический смысл теоремы о среднем в случае $g(x) = 1$

Оценивание интегралов при помощи теоремы о среднем

2. ИНТЕГРАЛ И ПЕРВООБРАЗНАЯ

Об интеграле в случае $a > b$

Теорема 6 (об интеграле и первообразной)

Док-во

△ Теорема 7 (формула Ньютона — Лейбница)

Док-во

Формула Ньютона — Лейбница — средство вычисления интегралов

Теорема 8 (формула Тейлора с интегральным остаточным членом)

Док-во

Следствие. Остаточный член в форме Лагранжа

3. НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

△ Определение несобственного интеграла для бесконечной и конечной точки

Замечание (о сходимости)

Замечание (о значении несобственного интеграла и формуле Ньютона — Лейбница)

Замечание (о причинах сходимости)

Определение абсолютной и условной сходимости несобственного интеграла

Теорема 9 (критерий Коши сходимости несобственного интеграла)

Док-во

Теорема 10 (о сходимости абсолютно сходящегося интеграла)

Док-во

△ Теорема 11 (об интегрировании основных особенностей)

Док-во

△ Теорема 12 (мажорантный признак и теорема сравнения для несобственных интегралов)

Док-во

Примеры на мажорантный признак и теорему сравнения

Теорема 13 (признаки Абеля и Дирихле сходимости несобственного интеграла)

Док-во

Пример ($\int \sin x/x dx$)

Случай нескольких особенностей

Сходимость в смысле главного значения

-
4. ЭЙЛЕРОВЫ ИНТЕГРАЛЫ: ГАММА-ФУНКЦИЯ И БЕТА-ФУНКЦИЯ
△ **Определение Г-функции и В-функции**
Теорема 14 (об основных свойствах Г-функции и В-функции)
Док-во
График гамма-функции
Формула Стирлинга
Связь бета-функции с биномиальными коэффициентами
Пример. Вычисление интеграла Эйлера — Пуассона
5. АДДИТИВНЫЕ ФУНКЦИИ И ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛА
Замечание об аддитивности площади и интеграла
Площадь криволинейной трапеции
Пример. Площадь эллипса
Площадь фигуры в полярных координатах

- Масса стержня**
Центр масс стержня
Второй момент и момент инерции стержня
Объем тел вращения
Пример. Объем шара
Гладкая кривая, длина кривой
Теорема 15 (о длине кривой)
Доказательство
Длина графика
Длина кривой в полярных координатах
Пример. Длина дуги эллипса. Эллиптический интеграл второго рода

Глава IV. Числовые ряды

1. СХОДИМОСТЬ РЯДА
△ **Определение ряда, частичных сумм, сходящегося ряда**
Теорема 1 (критерий Коши сходимости числового ряда)
Док-во
Теорема 2 (необходимое условие сходимости ряда)
Док-во
У несобственного интеграла аналогичного условия нет
Определение абсолютно и условно сходящегося ряда
Теорема 3 (абсолютно сходящийся ряд сходится)
Док-во
2. АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДОВ
△ **Теорема 4 (теорема сравнения для рядов)**
Док-во
Теорема 5 (интегральный признак сходимости ряда)
Док-во
△ **Теорема 6 (о сходимости эталонных рядов)**
Док-во
Пример (гармонический ряд расходится)
△ **Теорема 7 (признак Коши сходимости ряда)**
Док-во

△ Теорема 8 (признак Даламбера сходимости ряда)

Док-во

Пример $\sum x^n/n^n$

Пример $\sum x^n/n^s$

Ряды Тейлора элементарных функций

3. УСЛОВНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДОВ

Теорема 9 (признаки Абеля и Дирихле сходимости ряда)

Док-во

Следствие (признак Лейбница)

Пример $(\sum \sin nx/n)$

Пример $(\sum (-1)^n/n)$

Глава V. Дифференциальное исчисление функций многих переменных

1. \mathbb{R}^n КАК НОРМИРОВАННОЕ ПРОСТРАНСТВО

Замечание о модуле

Определение арифметического пространства \mathbb{R}^n и евклидова расстояния в нем

Примеры расстояний: Нью-Йорк, Москва, рукопожатия

△ Определение метрики и метрического пространства

△ Определение нормы и нормированного пространства

Замечание норма определяет метрику

△ Определение основных норм и метрик в \mathbb{R}^n : l_1, l_2, l_∞, l_p

Связь стандартного скалярного произведения с евклидовой нормой

Теорема 1 (о связи норм l_1, l_2, l_∞)

Док-во

Определение открытого и замкнутого шара нормы

Примеры (шары в разных нормах в \mathbb{R}^2)

Теорема 2 (об эквивалентности норм в \mathbb{R}^n)

Теорема 3 (неравенства Коши — Буняковского и Минковского для l_2)

Док-во

Определение предела последовательности в \mathbb{R}^n

Замечание о независимости сходимости от нормы

Замечание о покомпонентной сходимости

Определение внутренней, внешней, граничной и предельной точек, внутренней, внешности, границы и замыкания

Примеры. Открытый и замкнутые шары, сфера, все пространство \mathbb{Q}^n

Определение открытого и замкнутого множества

Примеры. Открытый и замкнутые шары, сфера, все пространство \mathbb{Q}^n

Определение ограниченного множества

Определение компакта

Определение связного множества и области

Замечание о теореме Больцано — Коши (промежуток \rightarrow область)
Замечание о теореме Вейерштрасса (отрезок \rightarrow компакт)

2. ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Определение линейного отображения

Примеры линейного отображения:

1. Умножение на матрицу
2. Умножение на вектор
3. Скалярное произведение и норма
4. Дифференцирование в пространстве полиномов
5. Определенный интеграл

Матрица линейного отображения

Замечание. Оператор отождествляется с матрицей в случае \mathbb{R}^n и стандартного базиса

Пример. дифференцирование в пространстве полиномов

3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

△ **Определение дифференциала**

Замечание о покомпонентной записи

Замечание о внутренней точке в определении

△ **Определение частной производной и матрицы Якоби**

Замечание о замороженных координатах

Пример частной производной

Теорема 4 (о связи дифференциала с частными производными)

Доказательство

Пример недифференцируемой функции с частными производными

О записи $df(x) = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$

△ **Определение градиента функции**

△ **Вид градиента в декартовых координатах**

Геометрический смысл градиента

Теорема 5 (о дифференцировании и алгебраических операциях)

△ **Теорема 6 (о дифференцировании композиции, цепное правило)**

Док-во

4. СТАРШИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Определение старших производных

Пример. Смешанные производные $f(x, y) = \operatorname{arctg}(y/x)$.

Теорема 7 (о перестановочности частных производных)

Без док-ва

△ **Определение пространства $C^k(\Omega)$**

△ **Теорема 8 (формула Тейлора)**

Док-во

△ **Определение второго дифференциала и матрицы Гессе**

5. ЛОКАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

Определение локального экстремума

Определение критической точки

△ **Теорема 9 (необходимое условие локального экстремума)**

Док-во

△ Теорема 10 (достаточное условие локального экстремума)

Док-во

Пример полуопределенной формы

Метод наименьших квадратов