

Глава V. Дифференциальное исчисление функций многих переменных (продолжение)

6. ТЕОРЕМА ОБ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

Замечание разрешимости системы линейных уравнений  $Ax = y$ ,  $m = n$ ,  $m > n$ ,  $m < n$ .

△ Теорема 11 (об обратной функции)

Без доказательства

Замечание. О нахождении частных производных

Замечание. О глобальной обратимости и  $|\partial f / \partial x| \neq 0$

Пример. Полярные координаты. Матрица Якоби прямого и обратного отображения.

Замечание о разрешимости системы линейных уравнений  $Ax = y$  в случае  $m < n$ .

Теорема 12 (о неявной функции)

Без доказательства

Замечание о локализации

Нахождение производной неявной функции

Нахождение производной неявной функции

Примеры нахождения производной неявной функции в размерностях 2,3

Примеры нахождения производной неявной функции в размерностях 2,3

Пример.  $pV/T - \nu R = 0$

Пример. Двойной математический маятник

7. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ

△ Определение диффеоморфизма

△ Полярная система координат

Полярная система координат

Цилиндрическая система координат

△ Сферическая система координат (физическая)

Сферическая система координат (физическая)

Сферическая система координат (географическая)

Связь между производными в старой и новой системах координат

Запись оператора Лапласа в полярных координатах. Сферически симметричные решения уравнения Пуассона

VI. МЕРА И ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

1. ИНТЕГРАЛ РИМАНА

Геометрическая интерпретация многомерного интеграла (объем подграфика)

Определение многомерного интеграла Римана через суммы Дарбу

Определение меры Жордана и множеств измеримых по Жордану

Свойства интеграла Римана (аддитивность, монотонность, интегрируемость непрерывных функций)

Теорема 1 (об интегрируемости по Риману непрерывной функции)

2. МЕРА ЛЕБЕГА

Суммирование мелочи по Лебегу

Соображения о монотонности

Определение элементарного множества и его стандартной меры

Обновлено 4 сентября 2014 г.

**Свойства стандартной меры**  
**Определение кольца, алгебры,  $\sigma$ -алгебры**  
**Примеры. Элементарные множества, промежутки**

- △ **Определение меры**  
*Мера на  $R$  счетно аддитивна*
- Определение внешней меры Лебега**
- Свойства внешней меры**  
**(определена и конечна, субаддитивность)**

---

Лекция 5

**Определение измеримого множества в  $n$ -мерном промежутке**  
**Определение измеримого множества и меры Лебега в  $\mathbb{R}^n$**   
**Свойства измеримых множеств**  
**Свойства меры Лебега**  
**Измеримость  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$  по Лебегу и неизмеримость по Жордану**

3. ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

- △ **Определение измеримой функции**
- Свойства измеримых функций**
- Определение интеграла Лебега**
- Свойства интеграла Лебега**
- Теорема 2 (о связи интегралов Римана и Лебега)**

---

Лекция 6

*Замечание. Об интеграле и модуле*  
*Замечание.  $\sin x/x$  не интегрируема по Лебегу*

- △ **Определение «почти всюду»**
4. ВЫЧИСЛЕНИЕ МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ
- Определение кратного и повторного интегралов**
  - △ **Теорема 3 (Фубини)**
  - △ **Теорема 4 (Тонелли)**  
*Напоминание о формуле замены переменной в одномерном случае*
  - △ **Теорема 5 (формула замены переменной)**

---

Лекция 7

**Геометрический смысл якобиана**  
*Интегрирование в классических системах координат*

- △ **Элементы площади и объема в криволинейных координатах**  
**Теорема 6 (об интегрировании степенных особенностей)**

---

Лекция 8

**Доказательство??**  
*Пример. Объем  $n$ -мерного шара НАДО СДЕЛАТЬ!*

5. ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА
- Определение интеграла, зависящего от параметра**
  - Теорема 7 (типа теоремы Лебега о предельном переходе)**
  - Теорема 8 (о дифференцировании ИЗОПа)**
  - Гладкость гамма-функции**
  - Потенциал простого слоя на плоскости*
  - Непрерывность потенциала простого слоя вне поверхности и на ней**

Дифференцируемость потенциала простого слоя вне поверхности и на ней  
Вычисление интеграла Дирихле дифференцированием по параметру  
Вычисление интеграла Дирихле дифференцированием по параметру  
Дельта-образные семейства функций

△ Теорема 9 (формула дифференцирования ИЗОПа)

Теорема 9 (формула дифференцирования ИЗОПа)

Доказательство

Доказательство

Оператор интегрирования и его степени. Дробное интегрирование и уравнение

Абеля

Оператор интегрирования и его степени. Дробное интегрирование и уравнение

Абеля

VII. Анализ на многообразиях в  $\mathbb{R}^n$

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МНОГООБРАЗИЯ В  $\mathbb{R}^n$

△ Определение элементарного гладкого  $k$ -мерного многообразия в  $\mathbb{R}^n$

Элементарная гладкая кривая

Зачем условие взаимной однозначности

Зачем условие непрерывности обратного отображения

Зачем условие максимального ранга

Задание кривой как графика функции

Элементарная гладкая поверхность

Задание поверхности как графика функции

Замечание о невозможности покрыть одной параметризацией (окружность)

△ Определение гладкого  $k$ -мерного многообразия (с краем и без) в  $\mathbb{R}^n$

Теорема 1 (о крае многообразия)

Доказательство

Край и граница

△ Теорема 2 (о задании многообразия системой уравнений)

Док-во (Случай  $n = 3, m = 1, 2$ )

Замечание о нескольких параметризациях

Теорема 3 (об эквивалентности параметризаций)

Пояснение (вместо доказательства)

△ Определение касательного вектора и касательного пространства к многообразию

Теорема 4 (о касательном пространстве)

Теорема 5 (о касательном пространстве неявно заданного многообразия)

Доказательство

Пример. Касательное пространство и касательная плоскость к эллипсоиду

2. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

Постановка задачи нахождения условного экстремума

Определение (локального) условного экстремума

Обновлено 4 сентября 2014 г.

- △ Теорема 6 (о необходимых условиях условного экстремума / принцип множителей Лагранжа)

Док-во

Пример  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $F(x, y) = y - 1 = 0$

Теорема 7 (о достаточных условиях условного экстремума)

---

Лекция 13 – 27.03.2014

### 3. ИНТЕГРАЛ ПО МНОГООБРАЗИЮ

- △ Определение интеграла по  $k$ -мерному многообразию (с добавлением)

Объяснения к определению интеграла по многообразию

Случай  $k = n$

Случай  $k < n$

- △ Интеграл вдоль кривой и элемент длины

Элемент длины в полярных координатах

- △ Интеграл по поверхности и элемент площади

- △ Элемент площади на сфере в декартовых и сферических координатах

Теорема 8 (о независимости интеграла от параметризации)

---

Лекция 14 – 31.03.2014

Док-во

Определение интеграла по  $k$ -мерному многообразию (добавление)

Замечание о множествах меры ноль на многообразиях

### 4. ОРИЕНТАЦИЯ

- △ Определение работы поля вдоль кривой

- △ Определение потока поля через поверхность

Краткий курс по ориентации

Определение ориентации векторного пространства

- △ Определение ориентации на многообразии

Ориентируемые и неориентируемые многообразия. Лист Мебиуса

Согласованные параметризации

---

Лекция 15 – 3.04.2014

Пример согласованы ли параметризации сферы через  $x, y$  и  $\theta, \varphi$ ?

Определение внешней нормали к краю многообразия

Определение индуцированной ориентации края

Естественная и индуцированная ориентации  $\partial\mathbb{H}^k$

Индуцированная ориентация на сфере как на крае шара

- △ Определение внешней нормали к  $(n - 1)$ -мерному многообразию

- △ Ориентация  $(n - 1)$ -мерного многообразия при помощи указания внешней нормали

---

Лекция 16 – 7.04.2014

Касательный вектор и нормаль к ориентированной кривой

- △ Вычисление работы поля вдоль кривой

Выражение внешней нормали через параметризацию

Геометрический смысл объектов, связанных с нормалью  $N(x)$

- △ Вычисление потока через поверхность

### 5. КЛАССИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ

Определение носителя функции

Теорема 9 (многомерный аналог формулы Ньютона — Лейбница)

- Док-во
- △ Теорема 10 (формула Гаусса — Остроградского)
- Док-во
- △ Теорема 11 (формула Грина)
- Док-во
- △ Теорема 12 (формула Стокса)
- Док-во

6. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

- △ Определение градиента, ротора, дивергенции, лапласиана
- △ Определение оператора Гамильтона (набла)
- Интегральные формулы в терминах векторных операций*
- Физический смысл дивергенции**
- Физический смысл ротора**
- △ Определение потенциального векторного поля
- △ Теорема 13 (о потенциальных полях)
- Док-во
- △ Определение соленоидального и бездивергентного векторного поля

- Теорема 14 (о соленоидальных полях)**
- Док-во
- Электростатическое поле точечного заряда**
- Магнитное поле бесконечного проводника с током**

7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

- Замечание (о работе, потоке и дифференциальных формах)*

- Определение внешней дифференциальной формы**
- Базис в пространстве 1-форм*
- Замечание (о 2-формах и внешнем произведении)*
- Определение (внешнего произведения 1-форм)**
- Теорема 15 (о базисе в пространстве форм)**
- Док-во
- Соответствие между формами и полями**
- Соответствие между произведением форм и векторным произведением**
- Определение операций  $\varphi_*$  и  $\varphi^*$**
- Определение интеграла от формы по многообразию**
- Интеграл от формы работы**

---

Интеграл от формы потока  
Определение дифференциала формы  
Связь дифференциала формы с векторными операциями  
Теорема 16 (обобщенная формула Стокса)  
Классические интегральные формулы как следствия ОФС  
Теорема 17 (лемма Пуанкаре)  
Доказательство (первого утверждения)  
Лемма Пуанкаре в частных случаях

8. ВЕКТОРНЫЕ ОПЕРАЦИИ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

Обозначения  
Связь между векторами старого и нового базиса  
Связь между производными функции в старых и новых координатах  
Связь между координатами векторов в старых и новых координатах  
Скалярное произведение и метрический тензор  
Ортогональные системы координат и коэффициенты Ламе  
Коэффициенты Ламе классических систем координат  
Запись  $\text{grad } f$  в криволинейных координатах  
Запись  $\text{rot}$  и  $\text{div}$  в ортогональных координатах

*Пример. Дивергенция в сферических координатах*  
Запись оператора Лапласа в ортогональных координатах  
*Пример. Лапласиан в полярных координатах*

**VIII. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И РЯДОВ**

1. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Определение поточечной сходимости функциональной последовательности  
Определение равномерной сходимости функциональной последовательности  
*Примеры сходящихся последовательностей*  
Теорема 1 (о непрерывности предела функциональной последовательности)  
Доказательство

- △ Определение равномерной нормы  
*Замечание о пространстве непрерывных функций и равномерной норме*

2. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДОВ

- △ Определение поточечной и равномерной сходимости функционального ряда  
Теорема 2 (о непрерывности суммы ряда)  
Доказательство  
△ Теорема 3 (о почленном дифференцировании ряда)  
Теорема 4 (о почленном интегрировании ряда)  
Теорема 5 (критерий Коши)  
△ Теорема 6 (мажорантный признак Вейерштрасса)  
Доказательство

Обновлено 4 сентября 2014 г.

**Пример. Сходимость ряда  $\sum x^n/n!$**

3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

**Определение комплексных чисел, умножения и комплексного модуля**

**Определение предела последовательности в  $\mathbb{C}$**

**Определение предела комплексной функции**

*Замечание перед определением производной комплексной функции*

△ **Определение производной и аналитической функции**

*Замечание после определения*

**Теорема 7 (об условиях Коши — Римана)**

**Док-во необходимости**

---

Лекция 25 – 16.05.2014

△ **Определение операторов  $\partial/\partial z$  и  $\partial/\partial \bar{z}$**

**Определение интеграла от аналитической функции**

**Теорема 8 (об интеграле от аналитической функции)**

**Доказательство**

*Замечание о других замечательных свойствах аналитических функций*

4. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

△ **Определение степенного ряда**

**Определение верхнего предела**

△ **Теорема 9 (о сходимости степенного ряда)**

**Док-во**

*Замечание о расходимости вне круга сходимости*

---

Лекция 26 – 22.05.2014

*Примеры (сходимость на границе круга сходимости)*

△ **Теорема 10 (о почленном дифференцировании степенного ряда)**

**Док-во**

**Теорема 11 (о почленном интегрировании степенного ряда)**

**Док-во**

*Пример. Интегральный синус*

**Функция Бесселя**

△ **Определение ряда Тейлора**

△ **Теорема 12 (о рядах Тейлора элементарных функций)**

**Доказательство**

**Формула Эйлера**

5. ДОБАВЛЕНИЕ К ГЛАВЕ VII

**Закон Кулона**

**Теорема 13 (закон Гаусса)**

**Доказательство**