§ 19. Тройной интеграл и многократный интеграл

19.1. Пусть f — непрерывная функция трех переменных (x, y, z), заданная на ограниченной замкнутой области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Тройной интеграл создается аналогично двойному: берут разбиение области Ω на такие множества $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$, каждая из которых имеет объем (т. е. измерима, например, по мере Жордана), затем в каждой из частей разбиения Ω_i, $i = 1, \ldots, k$, берут по точке (x_i, y_i, z_i) и составляют интегральные суммы

$$\sum_{i=1}^{k} f(x_i, y_i, z_i) m(\Omega_i), \tag{19.1}$$

где $m(\Omega_i)$ — объем множества Ω_i. Число I называют (*тройным*) *интегралом* от функции f по множеству Ω, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого разбиения $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ области Ω на измеримые части такие, что $\max\limits_{i=1,\ldots,k} m(\Omega_i) < \delta$, и любого выбора точек $(x_i, y_i, z_i) \in \Omega_i$, $i = 1, \ldots, k$, выполняется неравенство

$$\left| I - \sum_{i=1}^{k} f(x_i, y_i, z_i) m(\Omega_i) \right| < \varepsilon. \tag{19.2}$$

Для тройного интеграла используют обозначение $\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dxdydz$.

Здесь символ $dxdydz$ указывает на то, что в основу измерения объема взят объем параллелепипеда как произведение его линейных размеров.

19.2. Если взять непрерывную функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ на замкнутой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, то аналогично двойному или тройному определяется многократный интеграл, для которого используется обозначение $\int \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$.

19.3. Свойства интеграла.

Линейность интеграла. *Тройной интеграл при фиксированной области интегрирования линеен, т. е. для любых непрерывных на Ω функций f, g и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ имеет место равенство*

$$\iiint\limits_{\Omega} (\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z))\, dxdydz$$

$$= \alpha \iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dxdydz + \beta \iiint\limits_{\Omega} g(x, y, z)\, dxdydz \tag{19.3}$$

Аддитивность интеграла. *При фиксированной функции интеграл аддитивен как функция множества, т. е. если* $D_1, \ldots, D_k$ *— конечный набор областей, внутренности которых попарно не пересекаются, и* $D = D_1 \cup \cdots \cup D_k$*, то*

$$\iiint\limits_{D} f(x,y,z)\,dxdydz = \sum_{i=1}^{k} \iiint\limits_{D_i} f(x,y,z)\,dxdydz. \tag{19.4}$$

19.4. Повторный интеграл. При переходе от тройного интеграла к повторному можно сначала фиксировать либо одну координату, оставляя переменными другие две, либо две координаты, оставляя переменной оставшуюся одну. В зависимости от типа фиксации координат получаются различные способы перехода к повторному интегрированию.

Итак, для $(x,y,z) \in \Omega$ пусть $\Omega_0 = \{(x,y) : (x,y,z) \in \Omega\}$ — проекция Ω на плоскость xOy. Фиксируем $(x,y) \in \Omega_0$, и пусть $\Omega_{(x,y)} = \{z : (x,y,z) \in \Omega\}$. Тогда

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{\Omega_0} \Bigg(\int\limits_{\Omega_{(x,y)}} f(x,y,z)\,dz \Bigg) dxdy.$$

Обычно интеграл в правой части записывают так:

$$\iint\limits_{\Omega_0} dxdy \int\limits_{\Omega_{(x,y)}} f(x,y,z)\,dz. \tag{19.5}$$

Если при этом для каждой пары $(x,y) \in \Omega_0$ множество $\Omega_{(x,y)}$ — это отрезок $[\varphi(x,y), \psi(x,y)]$, то

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{\Omega_0} dxdy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz. \tag{19.6}$$

В результате первого интегрирования (по z) мы получаем двойной интеграл, разбираться с которым учились раньше.

Ясно, что аналогичные соотношения получаются при фиксации сначала какой-либо другой координатной плоскости — yOz или zOx.

Теперь обсудим другой способ разбиения. Пусть $\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R} : (\exists y, z \in \mathbb{R})\ (x,y,z) \in \Omega\}$ — проекция области Ω на ось Ox. При каждом $x \in \Omega$ пусть $\Omega_x = \{(y,z) : (x,y,z) \in \Omega\}$ — сечение области Ω при данном x. Тогда

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_{\Omega_1} \biggl(\iint\limits_{\Omega_x} f(x,y,z)\,dydz \biggr) dx.$$

Здесь внутренний интеграл двойной, с которым мы умеем разбираться, внешний — обычный одномерный интеграл. В частности, если Ω_1 — это отрезок $\Omega_1 = [a,b]$, а при фиксированном $x \in [a,b]$ множество Ω_x — это криволинейная трапеция, ограниченная функциями $z = \lambda(x,y)$, $z = \mu(x,y)$, где $c(x) \leqslant y \leqslant d(x)$, то в обычных обозначениях

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{c(x)}^{d(x)} dy \int\limits_{\lambda(x,y)}^{\mu(x,y)} f(x,y,z)\,dz. \tag{19.7}$$

Как и выше, подобные формулы будут при первоначальном обращении к какой-либо из других координатных осей.

19.5. Замена переменной. Как отмечено при обсуждении замены переменных в двойном интеграле, при замене надо перенести функцию в область новых переменных и проинтегрировать по мере, в которой учтен коэффициент искажения, вносимый реализующим замену диффеоморфизмом.

Пусть f — непрерывная функция, определенная на открытой области $D \subset \mathbb{R}^3$, и пусть отображение Φ с координатными функциями $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$, $z = z(u,v,w)$, $(u,v,w) \in W$, — диффеоморфизм области W переменных u,v,w на область D. Пусть замкнутая область $\Omega \subset D$ является образом при этом диффеоморфизме некоторой замкнутой области $X \subset W$. Тогда имеет место равенство

$$\begin{aligned} &\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz \\ &= \iiint\limits_{X} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| dudvdw, \end{aligned} \tag{19.8}$$

где $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ — якобиан отображения Φ.

Равенство (19.8) называют *формулой замены переменной* в тройном интеграле.

Из конкретных новых переменных (криволинейных координат) часто используются *сферические координаты* φ, ψ, r, связанные с исходными переменными x, y, z равенствами

$$x = r\cos\varphi\cos\psi, \quad y = r\sin\varphi\cos\psi, \quad z = r\sin\psi, \quad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varphi,\psi,r)} = r^2\cos\psi.$$

Здесь переменная φ может меняться в каком-либо промежутке длиной 2π, обычно $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, а $\psi \in [-\pi/2, \pi/2]$. Бывают удобны также *цилиндрические координаты* r, φ, h, связанные с x, y, z равенствами

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = h, \quad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,h)} = r.$$

Здесь $r > 0$, φ пробегает при этом промежуток длиной не более 2π, обычно $\varphi \in [0, 2\pi)$, а $h \in \mathbb{R}$.

В подходящих случаях используются *обобщенные сферические координаты* φ, ψ, r, связанные с x, y, z равенствами

$$x = ar\cos^\alpha\varphi\cos^\beta\psi, \quad y = br\sin^\alpha\varphi\cos^\beta\psi, \quad z = cr\sin^\beta\psi,$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varphi,\psi,r)} = \alpha\beta abcr^2\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi\cos^{2\beta-1}\psi\sin^{\beta-1}\psi.$$

Здесь область изменения переменной φ зависит от показателя α и ограничивается возможностью возведения в степень α, но во всяком случае это область лежит в каком-либо промежутке длиной не более 2π, обычно $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, а $\psi \in [-\pi/2, \pi/2]$.

19.6. Пример. Запишем интеграл $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz$ в виде повторного, где Ω — область, ограниченная поверхностями $z = xy$, $y = x$, $x = 1$, $z = 0$. При этом рассмотрим разный порядок следования переменных.

Поверхности $x = 1$ и $y = x$ — это параллельные оси Oz плоскости, проходящие через соответствующие прямые плоскости xOy. Поверхность $z = xy$ — это седло, проходящее через оси координат Ox, Oy. Поскольку поверхность $x = 1$ должна участвовать в формировании области, у поверхности $z = xy$ надо брать ту часть, где $x > 0$. Равенства $z = xy$ и $z = 0$ говорят о том, что ограничивающими поверхностями будут также $x = 0$ и $y = 0$. Исходя из этих наблюдений, находим, что проекцией области Ω на плоскость xOy будет треугольник Δ: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $y \leqslant x$. Для каждой точки $(x,y) \in \Delta$ точка (x,y,z)

будет в Ω при $0 \leqslant z \leqslant xy$. Тем самым, сразу расставляя пределы интегрирования по Δ, получаем

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{\Delta} dxdy \int\limits_{0}^{xy} f(x,y,z)\,dz$$

$$= \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x} dy \int\limits_{0}^{xy} f(x,y,z)\,dz.$$

Поступим теперь иначе. Заметим, что условия $0 \leqslant x \leqslant 1$, $y \leqslant x$, $0 \leqslant z \leqslant xy$ приводят к ограничению $0 \leqslant z \leqslant 1$ на z. Фиксировав $z \in [0,1]$, получаем при каждом таком z область в плоскости xOy, ограниченную кривыми $xy = z$, $y = x$, $x = 1$ (рис. 1).

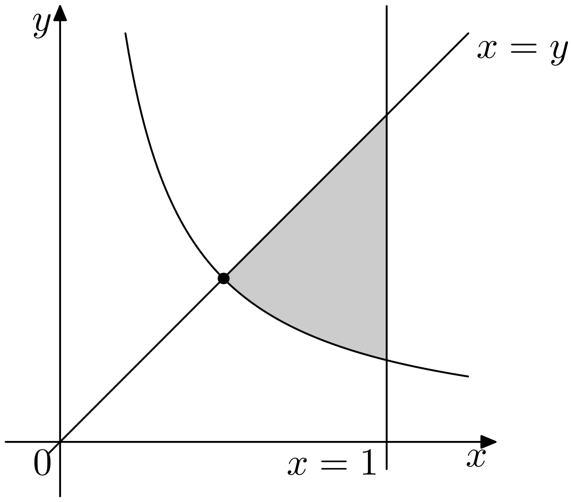

Рис. 1.

Этими линиями ограничивается выделенная на рис. 19.1 область. Найдем точку пересечения кривых $y = x$ и $xy = z$: $z = x^2$, $x = \sqrt{z}$. Тогда

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_{0}^{1} dz \int\limits_{\sqrt{z}}^{1} dx \int\limits_{z/x}^{x} f(x,y,z)\,dy.$$

19.7. Задачи.

1. Тройной интеграл $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz$ записать в виде повторного с указанным порядком следования переменных и расставить пределы интегрирования для указанных областей:

(1) $\Omega = \{x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ 4 \geqslant z \geqslant 0,\ 2x + y \leqslant 2\}$, (а) (y,z,x), (б) (x,y,z);

(2) $\Omega = \{x \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ x^2+y^2 \leqslant a^2,\ y^2+z^2 \leqslant a^2\}$, (а) (y,z,x), (б) (x,z,y);

2. В повторном интеграле, заменив порядок интегрирования на указанный, расставить пределы интегрирования:

(1) $$\int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_{0}^{h} f(x,y,z)\,dz, \quad (z,y,x);$$

(2) $$\int\limits_{0}^{4} dz \int\limits_{0}^{3-\frac{3}{4}z} dy \int\limits_{0}^{2-\frac{2}{3}y-\frac{z}{2}} f(x,y,z)\,dx, \quad (x,y,z);$$

3. Вычислить интеграл $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz$ для следующих функций и областей:

(1) $f(x,y,z)=y$, Ω — пирамида, ограниченная плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $2x+y+z=4$;

(2) $f(x,y,z)=x+z$, область Ω ограничена плоскостями $x+y=1$, $x-y=1$, $x+z=1$, $z=0$, $x=0$;

(3) $f(x,y,z)=x^2-z^2$, область Ω ограничена плоскостями $y=-x$, $z=x$, $z=y$, $z=1$;

(4) $f(x,y,z)=xy$, область Ω ограничена поверхностями $x^2+y^2=1$, $z=0$, $z=1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$;

19.8. Пример. В интеграле $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz$, где

$$\Omega = \{x^2+y^2+z^2 \leqslant 2az,\ x^2+y^2 \geqslant z^2\},$$

перейдем к сферическим координатам и запишем его в виде повторного.

Подставляя $x = r\cos\varphi\cos\psi$, $y = r\sin\varphi\cos\psi$, $z = r\sin\psi$ в неравенства, характеризующие область, получим неравенства

$$r^2 \leqslant 2ar\sin\psi, \quad r^2\cos^2\psi \geqslant r^2\sin^2\psi,$$

или

$$r \leqslant 2a\sin\psi, \quad |\cos\psi| \geqslant |\sin\psi|,$$

характеризующие соответствующую Ω область D в сферических координатах. Положительность r вместе с ограничением из сферической замены дает ограничение $0 \leqslant \psi \leqslant \pi/2$. Далее, среди $\psi \in [0, \pi/2]$ неравенство $|\cos\psi| \geqslant |\sin\psi|$ выполняется при $\psi \in [0, \pi/4]$. Итак, мы приходим к интегралу по области

$$0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leqslant r \leqslant 2a\sin\psi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

сферических переменных. Переход к повторному интегралу дает равенство

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\, dxdydz$$
$$= \iiint\limits_{D} f(r\cos\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\cos\psi, r\sin\psi) r^2 \cos\psi\, drd\varphi d\psi$$
$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/4} d\psi \int\limits_0^{2a\sin\psi} f(r\cos\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\cos\psi, r\sin\psi) r^2 \cos\psi\, dr.$$

19.9. Пример. Совершая подходящую замену, вычислим интеграл $\iiint\limits_{\Omega} xyz\, dxdydz$, где Ω расположена в октанте $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ и ограничена поверхностями

$$z = \frac{x^2+y^2}{m},\ z = \frac{x^2+y^2}{n}, \quad xy = a^2,\ xy = b^2, \quad y = \alpha x,\ y = \beta x$$

$$(0 < a < b,\ 0 < \alpha < \beta,\ 0 < m < n).$$

Учитывая наблюдения из примера 22.13, положим

$$u = \frac{x^2+y^2}{z}, \quad v = xy, \quad w = \frac{y}{x}.$$

Тогда при переходе к переменным u, v, w области Ω соответствует прямоугольник

$$m \leqslant u \leqslant n, \quad a^2 \leqslant v \leqslant b^2, \quad \alpha \leqslant w \leqslant \beta.$$

Найдем якобиан $\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$, замечая, что выражения u, v, w через x, y, z проще, чем выражения для координатных функций обратного отображения. Имеем

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \dfrac{2x}{z} & \dfrac{2y}{z} & -\dfrac{x^2+y^2}{z^2} \\ y & x & 0 \\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{x^2+y^2}{z^2} \begin{vmatrix} y & x \\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix} = -2\frac{y}{x}\frac{x^2+y^2}{z^2}.$$

Выразим переменные x, y, z через u, v, w. Переменные x, y, z положительны по условию. Из двух последних равенств замены получаем

$$y = \sqrt{vw}, \quad x = \sqrt{\frac{v}{w}}, \quad x^2 + y^2 = vw + \frac{v}{w} = \frac{v(w^2+1)}{w},$$

$$z = \frac{x^2+y^2}{u} = \frac{v(w^2+1)}{uw}.$$

Теперь

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{z^2}{x^2+y^2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{y}\cdot z\cdot\frac{z}{x^2+y^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{w}\cdot\frac{v(w^2+1)}{uw}\cdot\frac{1}{u} = -\frac{1}{2}\frac{v(w^2+1)}{u^2w^2}.$$

Переходим к нахождению интеграла:

$$\iiint\limits_{\Omega} xyz\,dxdydz$$

$$= \int\limits_m^n du \int\limits_{a^2}^{b^2} dv \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{vw}\sqrt{\frac{v}{w}}\frac{v(w^2+1)}{uw}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{v(w^2+1)}{u^2w^2}\,dw$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_m^n \frac{du}{u^3}\int\limits_{a^2}^{b^2} v^3\,dv \int\limits_\alpha^\beta \frac{(w^2+1)^2}{w^3}\,dw$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{u^2}\bigg|_m^n \cdot \frac{1}{4}v^4\bigg|_{a^2}^{b^2}\cdot\left(\frac{1}{2}w^2 + 2\ln w - \frac{1}{2w^2}\right)\bigg|_\alpha^\beta$$

$$= \frac{1}{32}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)(b^8-a^8)\left(\beta^2-\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}+4\ln\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

19.10. Задачи.

1. Вычислить интеграл $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz$ от следующих функций f по следующим областям Ω:

(1) $f(x,y,z) = z$, Ω ограничена поверхностями $R^2z^2 = h^2(x^2+y^2)$, $z = h$, $h > 0$;

(2) $f(x,y,z) = \sqrt{y^2+z^2}$, Ω ограничена поверхностями $y^2+z^2 = R^2$, $y + x = R$, $y - x = R$, $R > 0$;

(3) $f(x,y,z) = x^2 - y^2$, $\Omega = \{x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0\}$;

(4) $f(x,y,z) = x + z$, $\Omega = x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2,\ z \leqslant \sqrt{x^2+y^2}\}$;

(5) $f(x,y,z) = z\sqrt{x^2+y^2}$, $\Omega = \{x^2+y^2 \leqslant 2x,\ 0 \leqslant z \leqslant y\}$;

(6) $f(x,y,z) = xz^2$, $\Omega = \{(3x-4)^2 \leqslant y^2+z^2 \leqslant x^2\}$;

2. Найти

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} x^m y^n z^p\,dxdydz,$$

где m, n, p — целые неотрицательные числа.

3. Вычислить интеграл Дирихле

$$\iiint\limits_{V} x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s\,dxdydz,$$

где область V ограничена плоскостями

$$x+y+z = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

полагая

$$x+y+z = \xi, \quad y+z = \xi\eta, \quad z = \xi\eta\zeta.$$

19.11. Аналогично двойному, тройной интеграл $\iiint\limits_{\Omega} dxdydz$ по Ω от единичной функции равен объему тела $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

19.12. Задачи. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

(1) $x^2+y^2 = R^2$, $x+y+z = a$, $x+y+z = -a$;

(2) $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$, $z = x^2+y^2$;

(3) $z = xy$, $z = x+y$, $x+y = 1$, $x = 0$, $y = 0$;

(4) $z = x^2 + y^2$, $z = x + y$;

(5) $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = x^2 + y^2$, $z = 0$;

(6) $x^2 + y^2 = 1$, $z = e^{-(x^2+y^2)}$, $z = 0$;

19.13. Физические приложения. Пусть G — тело в $\mathbb{R}^3$ (телом будем считать связное замкнутое множество, совпадающее с замыканием своей внутренности). Если функция $\rho(x, y, z)$ — плотность тела G, то число

$$M = \iiint\limits_G \rho(x, y, z)\, dxdydz$$

называют *массой* тела G, а точку C с координатами

$$x_G = \frac{1}{M} \iiint\limits_G x\rho(x, y, z)\, dxdydz, \quad y_G = \frac{1}{M} \iiint\limits_G y\rho(x, y, z)\, dxdydz,$$

$$z_G = \frac{1}{M} \iiint\limits_G z\rho(x, y, z)\, dxdydz$$

— *центром масс тела* G.

Величины

$$M_{yz} = Mx_G, \quad M_{zx} = My_G, \quad M_{xy} = Mz_G$$

называют *статическими моментами тела* G относительно координатных плоскостей yOz, zOx и xOy.

Моментом инерции тела G относительно оси l называют величину

$$I_l = \iiint\limits_G d_l^2 \rho(x, y, z)\, dxdydz,$$

где $d_l = d_l(x, y, z)$ — расстояние от точки (x, y, z) до оси l. В частности, момент инерции относительно координатной оси Ox находится по формуле

$$I_x = \iiint\limits_G (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dxdydz,$$

формулы для I_y и I_z аналогичны.

Моменты инерции I'_{xy}, I'_{yz}, I'_{zx} относительно координатных плоскостей xOy, yOz, zOx определяют по формулам

$$I_{xy} = \iiint\limits_G z^2 \rho(x, y, z)\, dxdydz, \quad I_{yz} = \iiint\limits_G x^2 \rho(x, y, z)\, dxdydz,$$

$$I_{zx} = \iiint\limits_G y^2 \rho(x, y, z)\, dxdydz.$$

Момент инерции тела относительно точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ определяют по формуле

$$I_{M_0} = \iiint\limits_G d^2_{M_0}(x, y, z)\rho(x, y, z)\, dxdydz,$$

где $d(x, y, z)$ — расстояние от точки (x, y, z) тела до точки M_0. В частности: если M_0 — начало координат, то

$$I_0 = \iiint\limits_G (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dxdydz.$$

Задачи.

1. Найти момент инерции относительно оси Oz следующих тел с плотностью 1:

(1) $2ax \geqslant z^2, \quad x^2 + y^2 \leqslant ax,$

(2) $x^2 + y^2 \leqslant a^2, \quad x + y + z \leqslant a\sqrt{2}, \quad z \geqslant 0.$

Ответы: (1) $\frac{64\sqrt{2}}{135}a^5$**, (2)** $\frac{\pi a^2}{\sqrt{2}}$**.**