ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Лектор — Глеб Владимирович Дятлов

Программа курса лекций
(1-й семестр, лекции 72 ч., семинары 72 ч., экз.)

Введение

Предпосылки возникновения математического анализа. Общематематические понятия. Логическая символика. Высказывания. Кванторы.

Предел и непрерывность функций одной переменной

Вещественные числа. Аксиома полноты. Принцип вложенных отрезков. Точные границы. Наибольший элемент. Существование точных границ. Расширенная числовая прямая. Критерий точной верхней границы.

Предел последовательности. Сходящиеся последовательности. Последовательности, стремящиеся к бесконечности. Предел и неравенства. Теорема о зажатой последовательности. Предел и ограниченность. Предел и арифметические операции. Подпоследовательности и частичные пределы. Теорема Больцано — Вейерштрасса. Теорема Вейерштрасса о монотонной последовательности. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши.

Предел функции. Предельные точки. Определение предела функции. Окрестности и проколотые окрестности. Определение предельной точки и предела на языке окрестностей. Эквивалентность определений предела по Гейне и по Коши. Предельный переход в неравенстве. Предел и алгебраические операции. Предел композиции. Критерий Коши.

Асимптотические сравнения. Сравнения o-малое и O-большое. Преобразование выражений с o-малыми и O-большими. Главная часть функции.

Элементарные функции и замечательные пределы. Существование предела последовательности $(1 + x/n)^n$. Показательная функция и ее свойства. Число e. Натуральный логарифм и его свойства. Степенная функция и ее свойства. Тригонометрические функции. Замечательные пределы. Сравнение степенной, показательной и логарифмической функций.

Непрерывность. Классификация разрывов. Непрерывность суммы, разности, произведения, отношения, композиции. Теорема Больцано — Коши о промежуточных значениях. Теорема Вейерштрасса о наибольшем и наименьшем значениях.

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Дифференцируемые функции. Определение производной функции. Физический и геометрический смысл производной. Определение дифференциала. Геометрическая интерпретация дифференциала. Связь производной и дифференциала. Дифференцирование и алгебраические операции. Производная композиции, обратной функции. Производные элементарных функций.

Приращения дифференцируемых функций. Локальный экстремум. Теорема Ферма о необходимых условиях экстремума. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши о приращении.

Формула Тейлора. Определение старших производных. Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа и Пеано. Разложения Тейлора основных элементарных функций.

Исследование функции. Монотонность. Достаточное условие локального экстремума. Выпуклые функции. Точки перегиба. Асимптоты. Правила Бернулли — Лопиталя.

Первообразная. Интегрирование по частям для первообразной. Замена и подстановка для первообразной. Первообразная рациональной функции. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Интеграл Римана

Определение интеграла Римана и его свойства. Разбиения и интегральные суммы. Определение интеграла Римана. Суммы Дарбу. Критерий Дарбу. Критерий интегрируемости в терминах колебания функции. Необходимое условие интегрируемости. Интегрируемость непрерывной и монотонной функции. Линейность, аддитивность и монотонность интеграла. Первая теорема о среднем.

Интеграл и первообразная. Связь интеграла и первообразной. Формула Ньютона — Лейбница. Формула Тейлора с интегральным остаточным членом.

Несобственный интеграл. Определение несобственного интеграла для бесконечной и конечной точки. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла. Абсолютная и условная сходимость несобственного интеграла. Интегрирование степенных особенностей. Теорема сравнения. Признаки Абеля и Дирихле. Сходимость в смысле главного значения.

Эйлеровы интегралы. Определение Г-функции и В-функции и их основные свойства. Интеграл Эйлера — Пуассона.

Приложения интеграла. Представление аддитивной функции интегралом. Площадь криволинейной трапеции. Объем тел вращения. Длина кривой. Площадь поверхности вращения. Независимость длины пути от параметризации.

Числовые ряды

Сходимость ряда. Определение ряда, частичных сумм, сходящегося ряда. Критерий Коши. Необходимое условие сходимости ряда. Абсолютно и условно сходящиеся ряды.

Абсолютная сходимость рядов. Теорема сравнения для рядов. Интегральный признак сходимости. Сходимость эталонных рядов. Гармонический ряд. Признаки Коши и Даламбера.

Условная сходимость рядов. Признаки Абеля и Дирихле. Признак Лейбница.

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

Метрические и нормированные пространства. Определение арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ и евклидова расстояния в нем. Определение метрики и метрического пространства. Определение нормы и нормированного пространства. Норма и метрика. Примеры нормированных и метрических пространств. Эквивалентность норм в $\mathbb{R}^n$. Открытые и замкнутые шары. Скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Неравенства Коши — Буняковского и Минковского. Предел последовательности в $\mathbb{R}^n$. Открытые и замкнутые множества. Свойства открытых и замкнутых множеств. Окрестности, внутренние, внешние, граничные точки. Критерий замкнутости. Компакты. Критерий компактности. Связные множества и области.

Линейные отображения. Определение линейного отображения. Примеры. Матрица линейного отображения.

Дифференцирование функций многих переменных. Определение дифференциала. Определение частной производной и матрицы Якоби. Связь дифференциала с частными производными. Пример недифференцируемой функции с частными производными. Градиент функции и его вид в декартовых координатах. Геометрический смысл градиента. Дифференцирование и алгебраические операции. Дифференцировании композиции, цепное правило.

Старшие производные и формула Тейлора. Определение старших производных. Перестановочность частных производных. Определение пространства $C^k(\Omega)$. Формула Тейлора. Определение второго дифференциала и матрицы Гессе.

Локальный экстремум. Определение локального экстремума и критической точки. Необходимое условие локального экстремума. Достаточное условие локального экстремума.

Литература

1. *Зорич В. А.* Математический анализ.
2. *Курант Р.* Курс дифференциального и интегрального исчисления.
3. *Зельдович Я. Б.* Высшая математика для начинающих и её приложения к физике.
4. *Зельдович Я. Б., Яглом И. М.* Высшая математика для начинающих физиков и техников.
5. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики.
6. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления.
7. *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа.
8. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа.
9. *Демидович Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу.

10. *Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.* Сборник задач по математическому анализу.

Задания по основам математического анализа

Задание 1

1. Построить графики функций:

$$\text{(а)}\ f(x) = \frac{3x+2}{2x-3}, \quad \text{(б)}\ f(x) = 6\cos 2x + 8\sin 2x.$$

2. Методом математической индукции доказать равенство $\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}} = 2\cos(\pi/2^{n+1})$.

3. Доказать неравенство Бернулли $(1+x)^n \geq 1+nx$, $x > -1$, $n \in \mathbb{N}$.

4. Найти все a, для которых существует такое b, что при всех c выражение $b^2 - 4ab + 2ac - c^2 - 2b$ отрицательно.

5. Найти точные границы последовательности $x_n = (-1)^{n-1}(2+3/n)$.

6. Исследовать на ограниченность и монотонность последовательности (а) $x_n = \sqrt{n^2+1} - n$; (б) $x_n = \sqrt[n]{n}$. Найти их предел.

7. Доказать, что последовательность $x_n = (1+1/n)^{n+1}$ сходится.

8. Доказать, что

$$\text{(а)}\ \lim \frac{\ln n}{n} = 0; \quad \text{(б)}\ \lim \frac{a^n}{n!} = 0,\ a > 1.$$

9. Найти пределы

$$\text{(а)}\ \lim_{x\to 0} \frac{(1+\alpha x)^\beta - (1+\beta x)^\alpha}{x^2}$$

$$\text{(б)}\ \lim_{x\to\pi/2} \frac{1-\sin^{\alpha+\beta} x}{\sqrt{(1-\sin^\alpha x)(1-\sin^\beta x)}}.$$

10. Найти такие числа a, b, что

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1+ax^2}{1+bx^2} + O(x^5) \quad \text{при } x \to 0.$$

11. Найти все асимптоты функций (а) $y = x + \sqrt{4x^2+x+1}$; (б) $y = x \operatorname{arctg} x$.

12. Подобрать функции вида $C(x-a)^\lambda$, которые лучше всего аппроксимируют функции (а) $\operatorname{tg} x$ при $x \to \pi/2$; (б) $\ln\cos x$ при $x \to 0$.

Задание 2

1. Под каким углом пересекаются графики функций $\sin x$ и $\cos x$?

2. Найти производную функции

$$y = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}.$$

3. Доказать, что существует единственная функция $y = y(x)$, определенная для всех значений переменной x и удовлетворяющая уравнению $y - \varepsilon \sin y = x$, $0 \leq \varepsilon < 1$. Доказать, что эта функция бесконечно дифференцируема. Найти ее значение и все производные до третьего порядка включительно при $x = 0$.

4. Доказать неравенство

$$\frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}.$$

5. Определить число действительных корней уравнения $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20 = 0$ и локализовать их.

6. Найти разложение функции $y = \ln(1 + \arcsin x)$ по формуле Тейлора в окрестности нуля до x^3.

7. Построить график функции

$$y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}.$$

8. Найти неопределенные интегралы

$$
\begin{aligned}
&\text{(а)} \quad \int \frac{x}{(x^2+1)(x+1)^2}\,dx,\\
&\text{(б)} \quad \int \frac{dx}{3\sin x+\cos x},\\
&\text{(в)} \quad \int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}.
\end{aligned}
$$

Задание 3

1. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^{x^2}}\int\limits_0^x e^{y^2}\,dy.$$

2. Найти интеграл

$$\int\limits_0^\pi \operatorname{arctg}(\cos x)\,dx.$$

3. При каких значениях параметров p и q ($q>0$) сходится несобственный интеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^p\sin x}{1+x^q}\,dx.$$

4. Определить область существования интеграла и выразить его через интеграл Эйлера:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^\gamma x\,dx.$$

5. Циклоида — это кривая, заданная уравнениями $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$. Найти (а) длину одной арки циклоиды; (б) площадь под аркой; (в) объем тела, полученного вращением арки вокруг оси Ox; (г) площадь поверхности указанного тела.

Задание 4

1. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}.$$

2. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}.$$

Задание 5

1. Доказать, что поверхности $x^2 + y^2 = z^2$ и $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ортогональны в каждой общей точке.

2. Оператора Лапласа Δ переводит каждую дважды гладкую функцию $u(x, y, z)$ в новую функцию

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Выяснить, как действует оператор Лапласа на сферически симметричные функции, т. е. функции вида $u = f(r)$, где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Найти все сферически симметричные функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа $\Delta u = 0$.

3. Проверить, что функция $u(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x\psi\left(\frac{y}{x}\right)$, где φ и ψ — достаточно гладкие функции, удовлетворяет уравнению

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

4. Разложить по формуле Тейлора до второго порядка функцию

$$f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{1 + x}{1 + y}.$$

5. Найти точки локального экстремума функции

$$f = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}.$$

Программу и задания
по основам математического анализа
составил доцент, к.ф.-м.н. Г. В. Дятлов

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Лектор — Глеб Владимирович Дятлов

Программа курса лекций
(2-й семестр, лекции 64 ч., семинары 64 ч., экз.)

Дифференциальное исчисление функций многих переменных (продолжение)

Теорема об обратной функции. Разрешимость системы линейных уравнений. Теорема об обратной функции. Теорема о неявной функции. Примеры.

Замена переменных. Диффеоморфизмы. Криволинейные системы координат. Замена переменных в дифференциальных выражениях.

Мера и интеграл Лебега

Интеграл Римана. Геометрическая интерпретация многомерного интеграла. Определение многомерного интеграла Римана через суммы Дарбу. Определение меры Жордана и множеств, измеримых по Жордану. Свойства интеграла Римана (аддитивность, монотонность, интегрируемость непрерывных функций).

Мера Лебега. Суммирование мелочи по Лебегу. Соображения о монотонности. Определение интеграла как предела лебеговских сумм. Определение элементарного множества (объединение n-мерных промежутков) и его стандартной меры. Свойства стандартной меры (аддитивность и счетная аддитивность). Определение кольца, алгебры, σ-алгебры. Определение внешней меры Лебега. Свойства внешней меры (конечность, субаддитивность). Определение измеримого множества в n-мерном промежутке. Определение меры Лебега на n-мерном промежутке. Определение измеримого множества и меры Лебега в $\mathbb{R}^n$. Свойства измеримых множеств (σ-алгебра). Свойства меры Лебега (счетная аддитивность). Измеримость $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ по Лебегу и неизмеримость по Жордану. Множества меры ноль. Свойства множеств меры ноль, связь со счетностью.

Интеграл Лебега. Определение измеримой функции. Определение «почти всюду». Свойства измеримых функций. Определение простой функции. Определение интеграла от простой функции. Определение интеграла Лебега. Свойства интеграла Лебега. Связь интегралов Римана и Лебега.

Вычисление многомерных интегралов. Определение кратного и повторного интегралов. Теоремы Фубини и Тонелли. Расстановка пределов интегрирования. Формула замены переменной. Геометрический смысл якобиана. Якобианы классических систем координат. Элементы площади и объема в криволинейных координатах. Интегрирование степенных особенностей.

Интегралы, зависящие от параметра (ИЗОП). Теорема Беппо Леви. Теорема Лебега о мажорируемой сходимости. Непрерывность и дифференцируемость ИЗОП. Гладкость гамма-функции. Вычисление интеграла дифференцированием и интегрированием по параметру. Формула дифференцирования ИЗОП с переменными пределами.

Анализ на многообразиях в $\mathbb{R}^n$

Многообразия в $\mathbb{R}^n$. Определение элементарного гладкого k-мерного многообразия в $\mathbb{R}^n$. Определение гладкого k-мерного многообразия (с краем или без) в $\mathbb{R}^n$. Край и граница. Явный и неявный способы задания многообразия. Примеры. Функции перехода.

Касательное пространство. Определение касательного вектора и пространства к многообразию. Касательное пространство неявно заданного многообразия.

Условный экстремум. Определение условного экстремума. Необходимые условия условного экстремума (принцип множителей Лагранжа). Достаточные условия условного экстремума.

Интеграл 1-го рода по многообразию. Определение интеграла по k-мерному многообразию. Длина кривой и элемент длины в различных системах координат. Площадь поверхности и элемент площади в различных системах координат. Независимость интеграла от параметризации.

Ориентация. Определение ориентации векторного пространства. Определение ориентации на многообразии. Ориентируемые и неориентируемые многообразия. Лист Мёбиуса. Определение внешней нормали. Определение индуцированной ориентации края. Определение внешней нормали к $(n-1)$-мерному многообразию. Ориентация $(n-1)$-мерного многообразия при помощи нормали. Выражение внешней нормали через параметризацию.

Классические интегральные формулы. Формулы Грина, Гаусса — Остроградского, Стокса.

Элементы векторного анализа. Определение градиента, ротора, дивергенции, лапласиана. Определение оператора Гамильтона (набла). Работа поля вдоль кривой и циркуляция поля. Поток векторного поля через поверхность. Формула Гаусса — Остроградского в терминах дивергенции и потока. Формула Стокса в терминах ротора, потока и циркуляции. Физический смысл ротора и дивергенции. Определение потенциального векторного поля. Условие потенциальности поля. Определение соленоидального и бездивергентного векторного поля. Условие соленоидальности поля. Электростатическое поле точечного заряда. Магнитное поле элементарного тока.

Приложения. Уравнение теплопроводности. Закон Кулона. Теорема Гаусса. Закон Био — Савара. Сила Лоренца. Закон Ампера.

Замена переменных в векторных дифференциальных выражениях. Правило для преобразования производных при замене. Правило для перехода от одного базиса касательного пространства к другому. Правило для преобразования координат векторов. Запись grad в полярной системе координат. Коэффициенты Ламе. Запись grad, rot и div в ортогональных координатах.

Дифференциальные формы. Определение внешней дифференциальной формы. Базис в пространстве 1-форм. Внешнее произведение 1-форм. Базис в пространстве форм. Соответствие между формами и полями. Определение операций φ_* и φ^*. Определение интеграла от формы по многообразию. Соответствие между интегралами от формы и интегралами второго рода. Определение дифференциала формы. Связь дифференциала форм с векторными операциями. Обобщенная формула Стокса. Классические интегральные формулы как следствия обобщенной формулы Стокса.

Равномерная сходимость последовательностей и рядов

Равномерная сходимость последовательностей. Поточечная и равномерная сходимость функциональных последовательностей.

Непрерывность предела функциональной последовательности. Равномерная норма.

Равномерная сходимость рядов. Поточечная и равномерная сходимость функциональных рядов. Непрерывность суммы ряда. Почленное интегрирование и дифференцирование ряда. Критерий Коши. Признак Вейерштрасса. Признаки Абеля и Дирихле.

Аналитические функции. Комплексные числа. Сходимость в $\mathbb{C}$. Производная комплексной функции. Аналитические функции. Условия Коши — Римана. Независимость интеграла аналитической функции от пути.

Степенные ряды. Определение степенного ряда. Радиус сходимости степенного ряда. Сходимость на границе области сходимости. Равномерная сходимость степенного ряда. Почленное дифференцирование и интегрирование степенного ряда.

Литература

1. *Зорич В. А.* Математический анализ.
2. *Курант Р.* Курс дифференциального и интегрального исчисления.
3. *Зельдович Я. Б.* Высшая математика для начинающих и её приложения к физике.
4. *Зельдович Я. Б., Яглом И. М.* Высшая математика для начинающих физиков и техников.
5. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики.
6. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления.
7. *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа.
8. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа.
9. *Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления.
10. *Романовский П. И.* Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа.
11. *Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д.* Элементы прикладной математики.
12. *Демидович Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу.
13. *Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.* Сборник задач по математическому анализу.

Задания по основам математического анализа

Задание 6

1. Непрерывная функция $z = z(x, y)$ удовлетворяет условию

$$x^2 - y^2 + 2z^2 + xy - zy = 0$$

и условию $z(0, 1) = 1$. Доказать, что в некоторой окрестности точки $(0, 1)$ она бесконечно дифференцируема, а в самой точке найти dz и d^2z.

2. Преобразовать к полярным координатам r и φ дифференциальное выражение

$$y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y}.$$

3. В уравнении $yy' + xy^2 + x^3 = 0$ перейти к новым переменным u и t, которые связаны с прежними x и y двумя соотношениями:

$$u^2 - y^2 - x^2 = 0, \quad x^2 - t^2 + u^2 = 0.$$

4. Найти и исследовать точки условного экстремума функции $x + 4y - 2z$, если ее переменные связаны соотношениями:

$$x^3 + 64y^3 + 8z^3 + 12x + 48y + 2z = 26, \quad x + 4y = 2.$$

5. Доказать, что функция $x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x - 2y$ достигает наибольшего и наименьшего значения на множестве точек плоскости, удовлетворяющих условию $2x^2 + 5y^2 \leq 2xy + 25$, и найти эти значения.

Задание 7

1. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int\limits_1^2 dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\, dy.$$

2. Указать область, в которую переходит треугольник $0 < x < 1$, $0 < y < 1 - x$, при замене переменных $x + y = u$, $y = uv$. С помощью координатных линий описать, как действует это преобразование. Выразить двойной интеграл по треугольнику от произвольной функции (на выбор преподавателя) в координатах u и v.

3. Изменить порядок интегрирования в тройном интеграле (всего 6 способов)

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x^2} dz \int\limits_0^{1-x} f(x, y, z)\, dy.$$

4. Найти объем тела, ограниченного поверхностью

$$|x|^{1/2} + |y|^{1/2} + |z|^{1/2} = 1.$$

5. По шару радиуса R распределена масса M с плотностью $\rho(x, y, z)$. Найти момент инерции шара относительно диаметра, если плотность в точке (а) пропорциональна, (б) обратно пропорциональна расстоянию от этой точки до центра шара.

6. Исследовать сходимость несобственного двойного интеграла

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{dx\, dy}{|x - y|^p}.$$

7. Ньютоновым потенциалом тела в точке (x, y, z) называется интеграл

$$u(x, y, z) = \iiint\limits_V \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}},$$

где ρ — плотность тела, а V — занимаемая им область пространства. Доказать, что вне этой области u бесконечно дифференцируема; ее первые производные с точностью до постоянной равны компонентам силы, с которой тело притягивает материальную точку единичной массы с координатами x, y, z; а сумма вторых производных равна нулю, т. е. u — гармоническая функция.

Задание 8

1. Найти центр масс дуги циклоиды

$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

2. Найти массу части конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = 2x$, если ее поверхностная плотность равна $\rho(x, y, z) = xy + yz + zx + 5$.

3. Посчитать интеграл второго рода

$$\int\limits_{C_\pm} (y - z)\, dx + (z - x)\, dy + (x - y)\, dz,$$

где $C_\pm$ — окружности, по которым единичная сфера с центром у нуле пересекается вертикальными плоскостями $y = \pm x$ и которые пробегаются против часовой стрелки, если наблюдать за этим со стороны положительной полуоси абсцисс.

4. Найти поток поля $F = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ через внешнюю сторону сферы радиуса R с центром (a, b, c).

5. Доказать тождества

(а) $\operatorname{grad}(uv) = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u$,

(б) $\operatorname{div}(uA) = u \operatorname{div} A + A \cdot \operatorname{grad} u$,

(в) $\operatorname{rot}(uA) = u \operatorname{rot} A - A \times \operatorname{grad} u$,

(г) $\operatorname{div}(A \times B) = B \cdot \operatorname{rot} A - A \cdot \operatorname{rot} B$,

где u и v — скалярные поля, а A и B — векторные.

6. Выяснить, какие из перечисленных ниже векторных полей потенциальны, а как — соленоидальны:

(а) $(2xy + z)\mathbf{i} + (x^2 - 2y)\mathbf{j} + x\mathbf{k}$,
(б) $3y^2{-}3x^2\mathbf{j} - (y^2 + 2x)\mathbf{k}$,
(в) $z\mathbf{e}_\varphi - \cos\varphi\mathbf{e}_z/\rho$,
(г) $e^\rho \sin\varphi\mathbf{e}_\rho + e^\rho\cos\varphi\mathbf{e}_\varphi/\rho + 2z\mathbf{e}_z$,
(д) $2r\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\theta/r + \mathbf{e}_\varphi/r\sin\theta$,
(е) $-\varphi\operatorname{ctg}\theta\mathbf{e}_r/r + \varphi\mathbf{e}_\theta/r + 2\cos\theta\mathbf{e}_\varphi/r$.

7. С помощью формулы Стокса вычислить циркуляцию поля

$$(y - z)\mathbf{i} + (z - x)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$$

по эллипсу $x^2+y^2 = 1$, $x+2z = 1$, который обходится против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительной полуоси аппликат.

8. С помощью формулы Гаусса — Остроградского найти поток поля

$$x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$$

через внешнюю сторону симплекса, построенного по трем базисным векторам, которые приложены к началу координат.

9. Посчитать циркуляцию вдоль границы плоской области: постоянного поля, радиус-вектора $\mathbf{r}$ и поля $\mathbf{r}/r^2$. Для тех же векторных полей найдите их потоки через границу области. Для последнего из указанных полей разберите случаи, когда начало координат лежит вне области, внутри нее и на границе.

10. Найти прямым вычислением в предложенных координатах: (а) циркуляцию векторного поля $z\cos\varphi\mathbf{e}_\rho + \rho\mathbf{e}_\varphi + \varphi^2\mathbf{e}_z$ вдоль петли $\rho = \sin\varphi$, $z = 1$, ориентированной параметром φ; (б) поток поля $r\mathbf{e}_r + r\sin\theta\mathbf{e}_\theta - 3r\varphi\sin\theta\mathbf{e}_\varphi$ через замкнутую поверхность, ограниченную верхней полусферой радиуса R и плоскостью $\theta = \pi/2$. Посчитать те же величины, применяя формально формулы Стокса и Гаусса — Остроградского. Сравнить результаты. Объяснить.

11. Найти интеграл от дифференциальной формы

$$\int\limits_S zx\,dy\wedge dz + xy\,dz\wedge dx + yz\,dx\wedge dy,$$

где S — внешняя сторона части цилиндра $x^2 + y^2 = r^2$, $x \leq 0$, $y \geq 0$, $0 \leq z \leq H$.

Задание 9

1. Исследовать поточечную и равномерную сходимость на отрезке $[0, 1]$ последовательностей

$$\text{(а) } f_n(x) = x^n - x^{n+1}, \quad \text{(б) } g_n(x) = x^n - x^{2n}.$$

2. Пользуясь признаком Вейерштрасса, исследовать равномерную сходимость функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + n^2 x^4} \operatorname{arctg} \frac{x}{n}, \quad -\infty < x < \infty.$$

3. Описать область сходимости комплексных степенных рядов

$$\text{(а) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n z^n}{(n+1)(n+2)}, \quad \text{(б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n.$$

4. Применяя интегрирование или дифференцирование, найти суммы рядов

$$\text{(а) } \sum_{n=1}^{\infty} n^3 z^n, \quad \text{(б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}.$$

5. Разложить в ряд Маклорена функции

$$\text{(а)} \quad \arcsin \frac{2x}{1 + x^2}, \quad \text{(б)} \quad x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad \text{(в)} \quad \int\limits_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

Программу и задания
по основам математического анализа
составил доцент, к.ф.-м.н. Г. В. Дятлов