§ 1. Общематематические понятия

1.1. Предмет математического анализа (от Ньютона до Лебега).

1.2. Математический язык и логическая символика.

Высказывания. Основным объектом,с которым мы будем работать — это высказывание. Высказывание — это повествовательное выражение, о котором можно говорить истино оно или ложно. Например, «МММФ — самый большой факультет НГУ» — высказывание, а «С Новым годом!» или «Который час?» — нет. Тот факт, что можно говорить об истинности высказывания, еще не означает, что мы можем легко установить истино оно или ложно. Например, врядли кто-то возьмется легко определить истинность знаменитой гипотезы Римана о нулях дзета функции. Однако, любое высказывание либо истино, либо ложно. Никаких других возможностей нет!

Способы построения высказываний. Из одних высказываний можно строить другие. Основные способы построения высказываний хорошо известны — мы постоянно пользуемся ими общаясь между собой — это:

(1) отрицание;
(2) логическое «и»
(3) логическое «или»;
(4) условное предложение или импликация.

При построении новых высказваний основной вопрос — как истинность полученного высказывания зависит от истинности входящих в него частей. Проще всего изобразить эту зависимость при помощи так называемой таблицы истинности.

Способ	Запись	Означает	Таблица истинности
Отрицание (логическое не)	$\neg P$	Неверно P	$\begin{array}{ccc} \neg & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{array}$
Конъюнкция (логическое и)	$P\&Q$	Верны оба и P и Q	$\begin{array}{ccc} \& & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$
Дизъюнкция (логическое или)	$P \vee Q$	Верно хотя бы одно: P или Q	$\begin{array}{ccc} \vee & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$
Импликация (следование)	$P \to Q$	Если верно P, то верно и Q	$\begin{array}{ccc} \to & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$
Равносильность	$P \leftrightarrow Q$	P верно одновременно с Q	$\begin{array}{ccc} \leftrightarrow & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$

Единственное место в предыдущей таблице, которое иногда вызывает затруднение — это тот факт, что импликация верна, если посылка P ложна, независимо от истинности заключения Q.

Запись высказываний при помощи человеческого языка. Человеческий язык гораздо богаче математического языка символов (хотя при этом менее строг) и предоставляет множество разных способов записи одного и того же факта (высказывания). Особенно это разнообразие проявляется в случае импликации. Обсудим некоторые способы записи импликации $P \to Q$:

(1) Пусть P. Тогда верно Q.

(2) Если P, то Q.

(3) Из P следует Q.

Это понятные и нейтральные формы записи. Именно такими формами мы постараемся пользоваться в доказательствах теорем.

Однако есть и другие способы записи $P \to Q$:

(4) Для того, чтобы выполнялось P необходимо, чтобы выполнялось Q.

(5) Q — необходимое условие для выполнения P.

Это уже более тонкие формы, несущие в себе некоторую окраску. А именно, такая форма подчеркивает, что при выполнении P с неизбежностью (с необходимостью) выполняется и Q, или что P не может выполняться без Q. Такие формы встречаются в формулировках теорем в случае, когда P — интересующий нас факт, а Q — (относительно) легко проверяемое условие. Такая теорема означает, нечего пытаться доказать P, если Q не верно (ср. *Доказательство от противного* ниже). Примером такой теоремы будет теорема Ферма о необходимом условии локального экстремума (теорема 2.9).

Если записать ту же импликацию в другом порядке: $Q \leftarrow P$, то можно записать ее словами так:

(6) Q следует из P.

(7) Для выполнения Q достаточно выполнения P.

(8) P — достаточное условие для выполнения Q.

Опять форма (6) — нейтральная форма, а (7), (8) — окрашенные формы. Они применяются в случае, когда Q — интересующий нас факт, а P — легко проверяемое условие, и подчеркивают, что если мы хотим установить Q, нам будет достаточно доказать, что выполняется P. Пример такой формулировки — теорема 3.3.

Обратное утверждение. Если мы имеем высказывание вида $P \to Q$, то высказывание $P \leftarrow Q$, получающееся из исходного заменой стрелки на противоположную, называется *обратным утверждением.* Важным моментом, который нужно помнить об обратном утверждении, является то, что его истинность никак не связана с истиностью исходного утверждения, т. е. когда $P \to Q$ истинно, $P \leftarrow Q$ может быть истинным, а может ложным. Все зависит от конкретных P и Q. Также не нужно путать обратное утверждение $P \leftarrow Q$ с отрицанием $\neg(P \to Q)$.

Предложения с переменными. Переменная — это буква или символ, вместо которого можно подставлять различные конкретные объекты (значения) из определенного класса. *Предложением с переменными* мы будем называть повествовательные предложения, в которые входит одна или несколько переменных и которые при подстановке конкретных значений переменных превращаются в высказывания с вполне определенной истинностью. Естественно, истинность будет зависеть от конкретных значений переменных. Приведем примеры предложений с переменными:

(1) x делится нацело на три;

(2) $x < y$;

(3) функция f непрерывна.

Кванторы. Выбор конкретного значения — это один из способов сделать из предложения с переменной полноценное высказывание. Другой способ — это связать переменную квантором всеобщности или квантором существованя. Опишем этот процесс подробнее. Предположим, что $P(x)$ — предложение с переменной. Тогда высказывание вида

$$\text{Для всех } x \text{ из множества } A \text{ верно } P(x)$$

называется высказыванием всеобщности и символически записывается так

$$\forall x \in A \quad P(x).$$

Высказывание вида

$$\text{Найдется } x \text{ из множества } A \text{ такой, что верно } P(x)$$

называется высказыванием существования и символически записывается так

$$\exists x \in A \ \mid \ P(x)$$

Значки $\forall$ и $\exists$ заменяют слова «для всех» и «найдется» и называются *кванторами всеобщности* и *существования*, черта | заменяет слова «такой, что» и иногда опускается. Части высказывания $\forall x \in A$ и $\forall x \in A$ называются — *кванторными приставками.*

Заметим, что при таком способе построения высказываний множество A, из которого берется x, всегда конкретно определено, однако, иногда не указывается, если это множество ясно из контекста. Легко убедиться, что связывание переменной разными кванторами вообще говоря приводит к разным результатам. Например, высказывание

$$\exists x \in \mathbb{R} \ \mid \ x > 0$$

истинно, а

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 0$$

уже ложно.

Все переменные связаны!

Порядок кванторов. Имея предложение с двумя или более переменными, мы можем превратить его в высказывание, связав каждую переменную своим квантором. Если переменные связаны одинаковыми кванторами кванторные приставки могут идти в произвольном порядке, истинность от этого не зависит. Так следующие высказывания эквивалентны

$$\forall x \in A \quad \forall y \in B \quad P(x, y),$$
$$\forall y \in B \quad \forall x \in A \quad P(x, y).$$

Если же кванторы разные порядок важен. Например, высказывание

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \ \mid \ x < y$$

истино, а высказывание

$$\exists y \in \mathbb{R} \ \mid \ \forall x \in \mathbb{R} \quad x < y$$

ложно.

Запись предложений с кванторами. Разумеется, вместо слов «для всех» можно говорить «для любого» или же вычурное «каково бы ни было», а «найдется» заменять на «существует». Однако, существенное разнообразие записи высказываний с кванторами связано не с этим, а с положением кванторых приставок и даже их опусканием, а также с использованием особых словосочетаний, которые заменяют кванторные приставки и даже их комбинации. Последнее подроно обсждается в пункте *Макросы.*

Рассмотрим особенности записи высказываний с квантором $\forall$ на примере следующих эквивалентных высказываний:

(1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq 0$;
(2) $f(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$;
(3) $f(x) \geq 0$.

Аналогично, высказывания с квантором $\exists$ также допускают различную запись:

(4) $\exists (a, b) \subset \mathbb{R} \ \mid \ \forall x \in (a, b) \quad f(x) \geq 0$;
(5) $\exists (a, b) \subset \mathbb{R} \ \mid \ f(x)$ на (a,b);
(6) $f(x) \geq 0$ на некотором интервале (a, b).

В (2) кванторная приставка уходит в конец, а в (3) пропадает вовсе — подразумевается, что она легко додумывается из контекста. В (5) кванторная пристанвка $\forall x \in (a, b)$ отправляется в конец, превращаясь в лаконичное «на (a, b)». После этого и первая приставка $\exists (a, b) \subset \mathbb{R}$ убегает в конец, занимая свое место между «на» и (a, b) в виде слова «некоторый». Данные примеры показывают основную тенденцию, имеющую место при записи сложных высказываний с кванторами, — кванторные приставки иногда уходят в конец и принимают изящные лаконичные формы. Математики стремятся украсить и разнообразить свою речь. Действительно, записи типа (3) и (6) легче читаются, однако чаще остаются непонятыми, чем формальные развернутые формы (1) и (4).

Иногда переход кванторной приставки в конец приводит к неоднозначной трактовке. Например, как понимать предложение

Для всех $x \in A$ верно $P(x, y)$ для некоторого $y \in B$?

Как

$$\forall x \in A \quad \exists y \in B \ \mid \ P(x, y)$$

или

$$\exists y \in B \ \mid \ \forall x \in A \quad P(x, y)?$$

Работая с высказываниями, мы будем придерживаться следующих принципов:

(1) Если важна структура высказывания, например, при выводе одного высказывания с кванторами из другого, будем использовать развернутую форму типа (1), (4) (см. также *Дано–надо*).

(2) Все переменные должны либо иметь конкретные значения, либо быть связаны кванторами. Однако, кванторы всеобщности, стоящие в начале, можно опускать — если переменная явно никак не связана, то подразумевается, что она связана квантором $\forall$ как в случае (3). (Квантор $\exists$ опускается в исключительных ситуациях, например, «в окрестности точки» означает «в некоторой окрестности точки».) Вообще опусканием кванторов следует пользоваться с осторожностью.

Макросы. В программировании макросами называют короткие команды, которые заменяют большие часто повторяющиеся части текста. В математике также встречаются макросы. Приведем несколько примеров.

$$P(n) \text{ выполняется } \underline{\text{начиная с некоторого номера}}\ n_0$$

означает

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \mid \forall n \geq n_0 \quad P(n).$$

$$P(x) \text{ выполняется } \underline{\text{для достаточно больших}}\ x$$

означает

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} \ \mid \forall x \geq x_0 \quad P(x).$$

$$f(x) \ \underline{\text{локально}} \text{ ограничена}$$

означает

$$\forall [a,b] \subset \operatorname{dom} f \quad \exists C > 0 \ \mid |f(x)| \leq C.$$

$$f(x) \ \underline{\text{локально}} \text{ обратима}$$

означает

$$\begin{aligned} &\forall x \in \operatorname{dom} f \quad \exists \text{ интервал } (a,b), \text{ содержащий } x \ \mid \\ &\text{сужение } f(x) \text{ на } (a,b) \text{ обратимо.} \end{aligned}$$

В некотором смысле многие понятия в анализе, такие как предел и производная, — это макросы.

Отрицание. Отрицание P — это высказывание «Неверно, что P». Отрицания занимают особое место в связи с методом доказательства от противного (см. ниже). Посмотрим, как можно переписать отрицание в явном виде, более пригодном для работы, в зависимости от способа построения высказывания.

Неверно, что P и Q означает, что неверно хотя бы одно из высказываний P, Q, т.е. или неверно P или неверно Q:

$$\neg(P \& Q) = \neg P \vee \neg Q.$$

Неверно, что P *или* Q означает, что неверно и P и Q:

$$\neg(P \vee Q) = \neg P \& \neg Q.$$

Случай *импликации* вызывает особые затруднения! Переписать отрицание импликации проще всего глядя на соответствующую таблицу истинности. *Неверно, что* $P \to Q$ означает, что P и Q приняли те единственные значения при которых импликация ложна, т. е. P истинно, а Q ложно:

$$\neg(P \to Q) = P\&(\neg Q)$$

Неверно, что для всех $x \in A$ *имеет место* $P(x)$ означает, что найдется такое $x \in A$, что $P(x)$ не верно:

$$\neg(\forall x \in A \quad P(x)) = \exists x \in A \ \mid \ \neg A.$$

Неверно, что найдется $x \in A$ *такой, что имеет место* $P(x)$ означает, что $P(x)$ не верно для всех $x \in A$:

$$\neg(\exists x \in A \ \mid \ P(x)) = \forall x \in A \quad \neg A.$$

Можно сказать, что $\neg$ перепрыгивая через квантор меняет его на другой.

Теорема и доказательство. Теорема — это истинное утверждение, котореo имеет самостоятельное значение и выводится из других других верных утверждений (теорем или аксиом). Лемма — это та же теорема, но имеющая вспомогательное значение.

В простейшем случае можно считать, что теорема — это утверждение вида $A \to B$, которое остается если из длинной цепочки

$$\underbrace{A}_{\text{Тема}} \to \underbrace{A_1 \to A_2 \to \dots \to A_n}_{\text{Доказательство}} \to \underbrace{B}_{\text{Рема}}$$

вполне понятных переходов выбросить среднюю часть, которая называется *доказательством*. Утверждение A в формулировке теоремы называется в шутку *темой*, а B — *ремой*. При формулирвке теоремы важно понимать, где тема, а где — рема, и никогда не путать их. Напомним, что истинность обратного утверждения, которое получается, если поменять местами тему и рему, никак не связана с истинностью исходного утверждения $A \to B$.

Некоторые теоремы имеют особые «звания», которые подчеркивают тот или иной характер теоремы. Теорема вида $A \longleftrightarrow B$ называется *критерием.* (см., например, критерий Коши или критерий точной верхней границы). Теорема вида $A \to B$, где A — интересный факт, а выполнение B легко проверяется, называется *теоремой о необходимом условии* (выполнения A) или просто необходимым условием. Если же теорема имеет вид $A \leftarrow B$, где A — интересный факт, а B дегко проверяется, то теорема называется *теоремой о достаточном условии* или просто достаточным условием. Понятно, что критерий можно иначе назвать теоремой о необходимом и достаточном условии.

Доказать теорему — значит восстановить часть цепочки

$$\to A_1 \to A_2 \to \dots \to A_n \to,$$

которую опускают при формулировке теоремы. Если наша теорема — критерий, т. е. имеет вид $A \leftrightarrow b$, то восстанавливать нужно две цепочки

$$A \to A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_n \to B$$
$$B \to B_1 \to B_2 \to \cdots \to B_m \to A$$

или сразу строить цепочку

$$A \leftrightarrow A_1 \leftrightarrow A_2 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow A_n \leftrightarrow B.$$

В первом случае доказательство разбивается на две части, именуемых *необходимостью* и *достаточностью.*

Общего правила, по которому строятся переходы $A_i \to A_{i+1}$ нет, в этом и состоит искусство математика. В следующих двух пунктах мы обсудим два момента связанных с построением этих переходов, которые неизменно вызывают трудности у начинающих.

Дано-надо. Доказывая переход $A_i \to A_{i+1}$, нужно четко осознавать в чем состоят утверждения A_i и A_{i+1}, особенно если это утверждения с кванторами. Дело в том, что значения кванторной приставки несколько меняются в зависимости от того стоит она в A_i или A_{i+1}. Приставка $\forall x \in X$ в A_i означает, что мы можем удобным для нас образом выбрать x и для этого x будет выполняться оставшаяся часть утверждения A_i. Если же $\forall x \in X$ стоит в A_{i+1}, то это означает, что нам будут задавать различные значения x и для каждого из них мы должны обеспечить выполнение части A_{i+1}, стоящей после этой кванторной приставки. Как это сделать подробно разбирается в доказательствах первых же теорем. Квантор $\exists$ должен вызывать следующие ассоциации. Если $\exists y \in Y$ стоит в A_i, то существование y с нужным свойством гарантировано и мы можем использовать его в наших дальнейших выкладках. Появление же $\exists y \in Y$ в A_{i+1} означает, что нам достаточно предъявить хотя бы один y, для которого выполняется оставшаяся часть A_{i+1}.

В сложных случаях, когда кванторов много, мы будем подробно расписывать содержания A_i и A_{i+1} предваряя первое словом ДАНО, а второе словом НАДО (обратите внимание, что эти слова состоят из одних и тех же букв!). Подробный пример такого подхода — доказательство теоремы 14.

Метод доказательства от противного. Легко проверить, что утверждения

$$A_i \to A_{i+1} \quad \text{и} \quad \neg A_{i+1} \to \neg A_i$$

равносильны, т. е. их таблицы истинности совпадают (проверьте!). При этом доказательство второго утверждения может оказаться проще, чем доказательство первого. В этом случае переход $A_i \to A_{i+1}$ в доказательстве

$$\to A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_i \to A_{i+1} \to \cdots \to A_n \to$$

можно мысленно взять в скобки и заменить на $\neg A_{i+1} \to \neg A_i$:

$$\to A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_i \left\{ \neg A_{i+1} \to \neg A_i \right\} A_{i+1} \to \cdots \to A_n \to .$$

В этом состоит метод доказательства от противного. Иногда такая замена происходит на самом верхнем уровне, т. е. вместо $A \to B$ сразу доказывают $\neg B \to \neg A$, а иногда этим приемом пользуются лишь для части цепочки. В этом случае важно понимать, какая именно часть цепочки доказывается методом от противного, т. е. где стоят скобки { и }. Мы будем выделять эти места, используя следующую конструкцию: Докажем $A_i \to A_{i+1}$ методом от противного. Предположим, что A_{i+1} неверно. Далее идет цепочка рассуждений $\neg A_{i+1} \to \neg A_i$. В итоге, $\neg A_i$, противоречие. (Противоречие с тем, что A_i на самом деле верно, как следует из предшествующей части цепочки $\to A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_i$.) Используется также краткая конструкция: Если бы A_{i+1} было неверно, то ... имело бы место $\neg A_i$, что невозможно. Мы будем использовать разные конструкции, когда способ доказательства от противного встречается внутри самого перехода $\neg A_{i+1} \to \neg A_i$ (см. доказательство теоремы 3).

Определения. Когда та или иная ситуация, объект или свойство встречаются часто математики дают им имена или вводят новые понятия. Так возникают предел, производная, интеграл и т. д. С другой стороны, любое понятие в математике (в отличие от некоторых других наук) имеет четко определнное значение, т. е. может быть более подробно расписано через другие уже определенные понятия и не допускает произвольного (интуитивного) толкования. Это означает, что формулируя и доказывая теоремы, мы должны понимать смысл всех слов. Проблема заключается в том, что часто новые понятия называюстя словами обыденного языка, имеющими общепринятые интуитивно понятные значения. Это вызывает иллюзию понимания математического текста. Встречая такое слово, начинающий иногда не задумывается над тем, что в математике это слово имеет строго определенное значение. Так, например, происходит со словами предел, монотонность, граница, максимум, последовательность. Напротив, слова инфимум, интеграл, резольвента, не встречающиеся в обыденно языке невольно заставляют задуматься о своем значении. Итак, подчеркнем еще раз, что в математике мы должны знать точное математическое значение всех произносимых слов, а не довольствоваться интуитивным пониманием.

В заключение заметим, что слово если, часто используемое в определениях, в данном контексте имеет смысл двусторонней импликации или равносильности.

1.3. Множества. Дав клятву строго определять все понятия, мы тут же ее нарушим (причем дважды). Первый раз исключение будет сделатно для понятия множества, которое будет для нас синоимом слов совокупность, набор, система. Опыт показывает, что в рамках курса математического анализа такой интуитивный подход (именуемый наивной теореией множеств) не подводит. Более того, строгое определение понятия множетсва на этом этапе не приводит к более полному пониманию предмета. Допущенный пробел вскоре будет восполнен в курсе математической логики.

Работая с множествами, мы понимаем, что состав любого множества вполне определен, т. е. для любого элемента x и любого множества М либо $x \in M$, либо $x \notin M$. Иногда быват сложно сказать какой именно из этих двух случаев имеет место, однако, один из них и только один имеет место. Множества считаются равными если они имеют один состав:

$$A = B \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad \forall x \in A\ x \in B \quad \text{и} \quad \forall x \in B\ x \in A.$$

Множество можно задать просто перечислением его элементов. Другой способ — выделить в уже имеющемся множестве M множество элементов, обладающих некоторым свойством $P(x)$:

$$A = \{x \in M \mid \text{верно } P(x)\}.$$

Часто множество M понятно из конекста, в этом случае можно просто писать $A = \{x \mid \text{верно } P(x)\}$. Еще один способ построения множеств — взятие прямого произведения. Имея два элемента a и b (вообще говоря разных множеств), можно назвать a первым, а b — вторым и образовать новый объект (a, b), называемый упорядоченной парой. При этом, упорядоченные пары (a, b) и (c, d) равны тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$. Так что вообще говоря, $(a, b) \neq (b, a)$, в то время как $\{a, b\} = \{b, a\}$. Пусть теперь A и B — два множества, их *прямым произведением* называется множество

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Если множества A и B в прямом произведении равны то их прямое произведение $A^2 = A \times A$ называют квадротом A. Аналогично определяют упорядоченные n-ки $(a_1, \dots, a_n)$, прямые произведения n множеств, а также n-ую степень множества. Например, $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ — трехмерное координатное пространство.

Напомним, что для пары множеств A, B определены из объединение $A \cup B$, пересечение $A \cap B$, разность $A \setminus B$. Важно не путать знаки принадлежности $\in$ и включения $\subset$. Первый ставится между элементом и множеством, а второй между двумя множествами.

1.4. Отображения. Когда говорят, что задано отображение $f : X \to Y$, подразумевают, что

1. задано множество X, называемое областью определения;
2. задано множество Y, называемое областью прибытия;
3. задано правило f, которое каждому $x \in X$ сопостовляет некоторый элемент $y \in Y$.

Наряду с общим термином отображение используются слова функция, функционал, оператор, преобразование и т. д. В нашем курсе чаще всего будут встречаться отображения числовых множеств в числовые множества. Их обычно называют числовыми функциями или просто функциями. Функционал — это отображение действующее в поле скаляров (вещественную ось $\mathbb{R}$ или комплексную плоскость $\mathbb{C}$). Слова оператор и преобразование используют, когда область определения — это некоторое множество функций.

Если при задании числовой функции при помощи формулы область определения явно неуказана, то областью определения считают ее естественную область определения, т. е. множество всех значений для которых данное выражение определено. Так еслественная область определения $\sin x$ — вся числовая прямая $\mathbb{R}$, а для $\sqrt{x}$ — полупрямая $[0, \infty)$. Иногда имеет смысл сузить естественную область определения, например, так чтобы функция стала обратимой. В этом случае область определения нужно задавать явно.

Для области определения f мы будем использовать обозначение $\operatorname{dom} f$. Кроме того для f определено множество значений

$$\operatorname{im} f = \{y \in Y \mid \exists x \in X\ y = f(x)\}.$$

Если $A \subset \operatorname{dom} f$, то множество

$$f(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A \ y = f(x)\}$$

называется образом A под действием f. Для $B \subset Y$ определен полный прообраз

$$f(B) = \{x \in \operatorname{dom} f \mid f(x) \in B\}$$

множества B под действием f. Графиком $f : X \to Y$ называется подмножество $G(f)$ прямого произведения $X \times Y$, определенное следующим образом

$$G(f) = \{(x, y) \mid x \in \operatorname{dom} f, \ y = f(x)\}.$$

Композицией двух отображений $f : X \to Y$ и $g : \operatorname{dom} g \to Z$, где $\operatorname{dom} g \subset Y$, называется отображение $g \circ f$, определенное на

$$\operatorname{dom} g \circ f = \{x \in X \mid f(x) \in \operatorname{dom} g\}$$

и действующее по правилу

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Заметим, что $\operatorname{dom} g \circ f$ всегда является подмножеством $\operatorname{dom} f$, при этом иногда может совпадать с ним, а иногда нет. Так например будет в случае $f(x) = x^2 - x$, $g(y) = \sqrt{y}$.

Отображение $f : X \to Y$ называется взаимно однозначным или обратимым, если разным $x_1, x_2 \in X$ соответствуютт разные образы $f(x_1)$ $f(x_2)$, т. е.

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2).$$

Если f взаимно однозначно, то возникает новое отображение

$$f^{-1} : \operatorname{im} f \to X,$$

которое называется обратным к f.

Заметим, что

$$f(f^{-1}(B)) = B, \quad f^{-1}(f(A)) \supset A.$$

Тот факт, что во втором соотношении не всегда имеет место равенство можно убедиться взяв $f(x) = x^2$ и $A = [0, 1]$.

1.5. Мощность. В математике возникает наобходимость сравнивать множества по числу элементов. Когда множества содержат конечное число элементов, все просто — можно просто посчитать число элементов в каждом из них и потом сравнить получившиеся неотрицательные целые числа. В случае бесконечных множеств мы будем использовать универсальный способ сравнения, приведенный в следующем определении. Причем, окажется, что не все бесконечные множества имеют одинаковое число элементов, т.е. одни бесконечные множества содержат больше элементов чем другие.

Определение
равномощных множеств
⇓

Говорят, что множества X и Y *имеют одинаковое число элементов* или *равномощны* и пишут $|X| = |Y|$, если существует обратимое отображение $f : X \to Y$ такое, что $\operatorname{im} f = Y$.

Заметим, что равенство по мощности обладает следующими тремя свойствами:

1. $|A| = |A|$ (рефлексивность);
2. если $|A| = |B|$, то $|B| = |A|$ (симметричность);
3. если $|A| = |B|$ и $|B| = |C|$, то $|A| = |C|$ (транзитивность).

Это означает, что все множества распадаются на непересекающиеся группы , равных по мощности множеств. Множества с равным числом элементов попадают в одну группу, а с разным — в разные. Эти группы называются *кардинальными числами*, *кардиналами*, или *мощностью*. Группа, содержащая множество A обозначается $|A|$. Если этоа группа содержит другое множество B, то ее можно обозначить и $|B|$.

В курсе математической логики доказывается, что для любых множеств A и B выполняется ровно одно из трех условий:

1. $|A| = |B|$;
2. $|A| > |B|$, т. е. A имеет подмножество равномощное B и $|A| \neq |B|$;
3. $|A| < |B|$, т. е. B имеет подмножество равномощное A и $|A| \neq |B|$.

Таким образом любые два множества сравнимы по мощности.

§ 2. Вещественные числа

2.1. О понятии вещественного числа. Второе исключение из правила все определять строго мы сделаем для понятия вещественного числа. Со школы мы знакомы со следующими множествами чисел:

- $\mathbb{N}$ — натуральные числа: 1, 2, ... , т.е. числа, которые возникают при счете;
- $\mathbb{Z}$ — челые числа: $0, \pm 1, \pm 2, \dots$.
- $\mathbb{Q}$ — рациональные числа, представляющие собой дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, а $n \in \mathbb{N}$;
- $\mathbb{R}$ — вещественные (или действительные) числа, строгое построение которых вместе со всеми операциями требует некоторого труда и обычно в школе не делается. Тем не менее опыт полученный в школе позволяет легко оперировать с вещественными числами. Этот опыт мы и будем использовать в качестве фундамента.

Основные способы строгого введения множества $\mathbb{R}$ следующие:

Аксиоматический способ. Постулируется, что $\mathbb{R}$ — это множество на котором введены операции сложения и умножения и эти операции обладают определенными естественными свойствами, называемыми аксиомами поля вещественных чисел: ассоциативносто, дистрибутивность, и т. п. Подробное изложение этого подхода имеется в [Zorich, Reshetnyak].

Сечения Дедекинда. Каждое вещественное число определяется как два класса рациональных чисел таких, что любое число из первого класса меньше любого числа из сторого класса. Такой подход развит в классическом учебнике [Fikht].

Десятичные дроби. Здесь вещественное число — это (бесконечная) десятичная дробь

$$\overline{a_0, a_1, a_2 \ldots},$$

где $a_0 \in \mathbb{Z}$, а a_1, a_2, ... — цифры от 0 до 9. При этом рациональным числам соответствуют конечные или бесконечные периодические десятичные дроби. Остальные числа, представляющиеся бесконечными непериодическими десятичными дробями, называются иррациональными. Подробно этот подход к построению вещественных чисел рассмотрен в [Landau, Belonosov].

Мы будем считать, что в нашем распоряжении есть конструкция вещественных чисел в виде (бесконечных) десятичных дробей. При этом у нас никогда не будет необходимости складывать или умножать какие-либо конкретные десятичные дроби. Единственное, что нам потребуется (ровно один раз, в доказательстве теоремы 1) — это сравнение двух десятичных дробей.

2.2. Полнота $\mathbb{R}$.

Геометрическим образом множетсва вещественных числе $\mathbb{R}$ является числовая прямая, т. е. прямая на которой отмечены точки 0 и 1. После этого каждому вещественному числу сопоставляется точка на числоаой прямой. Важно, что эти точки заполняют числовую прямую полностью без пробелов. Это свойство $\mathbb{R}$ называется *полнотой.*

Полнота $\mathbb{R}$ вообще говоря неочевидное свойство. Например, $\mathbb{Q}$ представляет огромный запас чисел и при этом неполно. Достаточно нарисовать квадрат со строной 1 и отложить от точки 0 отрезок равный диагонали (его длина равна $\sqrt{2}$). Полученная точка, как известно, не соответствует ни одному рациональному числу.

Полнота $\mathbb{R}$ — важное свойство, когда речь заходит о пределе и производной. Многие базовые теоремы математичесого анализа используют это свойство. Для того, чтобы использовать полноту, мы должны дать этому понятию строгое определение. Это будет сделано немного позже, после критерия Коши (теорема). Дело в том, что полнота имеет несколько эквивалентных выражений: теоремы 1, 2, 4, 17 — все являются выражением одного и того же факта — полноты $\mathbb{R}$. Утверждение каждой из них можно взять в качестве определения полноты. Однако наиболее приспособленным для обобщения является формулировка критерия Коши — теоремы 17. Поэтму его и берут в качестве определения полноты (см. замечание после теоремы 17).

В нашем подходе теорема 1 выводится из конструкции десятичных дробей. При аксиматическом подходе ее формулировка берется просто в качестве аксиомы. Теоремы 2, 4, 17 будут выведены последовательно из теоремы 1 и представляют наиболее употребительные формы полноты — именно они используются при доказательстве многих базовых теорем одномерного анализа.

Теорема 1
Дедекинда
о полноте $\mathbb{R}$
$\Downarrow$
Теоремы 2, 4, 8

Пусть A и B — два непустых множества в $\mathbb{R}$ таких, что

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq b,$$

т. е. любой элемент A не больше любого элемента B.

Тогда

$$\exists c \in \mathbb{R} \;\mid\; \forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq c \leq b,$$

т.е. найдется хотя бы одно число, разделяющее A и B.

Доказательство

Шаг 1 (случай, когда A содержит хотя бы одно положительное число). Построим искомое число c явно в виде (бесконечной) десятичной дроби. Множество B, будучи непустым, содержит хотя бы одно число $b = b_0, b_1 b_2 \ldots$. Разобьем $[0, \infty)$ на промежутки $[n, n+1)$ и будем двигаться по ним справа налево, начиная с $[b_0, b_0 + 1)$, пока не найдем первый промежуток, содержащий какое-нибудь число множества A. Пусть это промежуток $[c_0, c_0 + 1)$. Число c_0 будет целой частью c.

Далее разобьем промежуток $[c_0, c_0 + 1)$ на десять равных промежутков

$$\underset{0}{[c_0, \overline{c_0, 1})}, \quad \underset{1}{[\overline{c_0, 1}, \overline{c_0, 2})}, \ldots, \underset{9}{[\overline{c_0, 9}, c_0 + 1)},$$

пронумеровав их числами $0, 1, \ldots, 9$. Двигаясь опять справа налево, найдем первый промежуток, содержащий какое-нибудь число множества A. Номер найденного промежутка будет цифрой c_1. Промежуток $[\overline{c_0, c_1}, \overline{c_0, (c_1 + 1)})$ в свою очередь снова разбивается на десять равных промежутков, просматривая который мы находим очередную цифру c_2.

В результате получается десятичная дробь $\overline{c_0, c_1 c_2 c_3 \ldots}$. Если в полученной записи начиная с некоторого момента идут одни девятки, они отбрасываются и предыдущая цифра увеличивается на единицу.

Шаг 2 (c — искомое). Напомним, что для сравнения двух дробей их записывают друг под другом и сравнивают цифры начиная слева до первого несовпадения, которое и выявляет большее число. Если все цифры совпадают, то числа равны.

Надо

$$\forall a \in A \quad a \leq c,$$
$$\forall a \in A \quad c \leq b.$$

Докажем первое методом от противного. Предположим, что

$$\exists k \;\mid\; a_k > c_k.$$

Но это противоречит способу построения c_k: если на k-ом шаге мы выбрали ячейку с номером k, это означает, что в A нет чисел вида $c_0, c_1 c_2 \ldots c_{k-1} a_k$ с $a_k > c_k$. Аналогично докажем второе. Предположим, что

$$\exists k \;\mid\; b_k < c_k.$$

Тогда в A найдется число $a = c_0, c_1c_2 \dots c_k \dots$, которое подавно больше b, а это противоречит предположению, что

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq b.$$

Шаг 3 (остальные случаи). Если в A нет ни одного положительного числа, то возьмем $c = 0$. Если же в B нет отрицательных элементов, то повторим рассуждения шага 1 с учетом знака. **Теорема доказана.**

Пример. Рациональные приближения числа π.

Теорема 2
принцип
вложенных отрезков
$\Downarrow$
Теоремы 3, 17, 19, 32

Пусть $[a_n, b_n]$ — последовательность непустых отрезков в $\mathbb{R}$ такая, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n].$$

Тогда

$$\exists c \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N} \quad c \in [a_n, b_n].$$

Иными словами, любая последовательность непустых вложенных отрезков в $\mathbb{R}$ имеем общую точку.

Доказательство Выведем теорему из теоремы Дедекинда. Пусть $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ — множество левых концов, а $B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ — множество правых концов. Множества A и B удовлетворяют условиям теоремы 1. Действительно,

$$\forall n, l \in \mathbb{N},\ l < n, \quad a_{n-l} \leq a_n \leq a_{n+l} \leq b_{n+l} \leq b_n \leq b_{n-l},$$

Теорема 1 $\rightarrow$

т. е. любое a_n не меньше любого b_n. По теореме 1

$$\exists c \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq c \leq b_n.$$

Теорема доказана.

Замечание. Отрезки в теореме 2 нельзя заменить произвольными промежутками, например, интервалами (a_n, b_n). Повторив построения, мы получим $a_n \leq c \leq b_n$, в то время как нужно более сильное неравенство $a_n < c < b_n$, которое может не выполняться. Достаточно взять два примера: $(-1/n, 1/n)$ и $(0, 1/n)$.

2.3. Мощность континуум.

4 лекция

Поскольку $\mathbb{N}$ — подмножество $\mathbb{R}$, мощность первого заведомо не больше мощности второго. Используя свойство полноты, теперь мы можем доказать, что мощность вещественной прямой $\mathbb{R}$ строго больше мощности множества натуральных чисел $\mathbb{N}$.

Теорема 3
о несчетности $\mathbb{R}$
$\Downarrow$

Не существует взаимно однозначного отображения $\mathbb{N}$ на все $\mathbb{R}$.

Доказательство. Будем доказывать от противного. Предположим, что существует взаимно однозначное отображение $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, у которого $\operatorname{im} f = \mathbb{R}$, и получим противоречие с известными утверждениями.

Возьмем отрезок $[a_1, b_1]$, который не содержит $f(1)$. Это, очевидно возможно. Теперь возьмем отрезок $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$, не содержащий $f(2)$. Это делается, например, так. Если $f(2) \notin [a_1, b_2]$, то $[a_2, b_2]$ просто берется равным $[a_1, b_1]$, Если $f(2) \in (a_1, b_2]$, то $[a_2, b_2] = [a_1, f(2) - \frac{f(2)-a_1}{2}]$. Если же $f(2) \in [a_1, b_2)$, то $[a_2, b_2] = [f(2) + \frac{b_1 - f(2)}{2}, b_1]$. Продолжая, мы получим бесконечную последовательность вложенных промежутков $[a_n, b_n]$ такую, что $f(n) \notin [a_n, b_n]$.

Теорема 2 →

По теореме 2 отрезки $[a_n, b_n]$ имеют общую точку $c \in \mathbb{R}$. Очевидно, что точка c не может быть ни одним из значений $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Действительно, если бы $c = f(n)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то $c = f(n) \in [a_n, b_n]$, что невозможно по построению. Мы получили противоречие. **Теорема доказана.**

2.4. Точные границы.

Определение
верхней и нижней границы
⇓

Пусть $A \subset \mathbb{R}$.

Число $u \in \mathbb{R}$ называется *верхней границей* A, если

$$\forall a \in A \quad a \leq u.$$

Число $l \in \mathbb{R}$ называется *нижней границей* A, если

$$\forall a \in A \quad l \leq a.$$

Определение
ограниченного множества
⇓

Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху*, если

$$\exists u \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A \quad a \leq u,$$

т. е. A имеет хотя бы одну верхнюю границу.

Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным снизу*, если

$$\exists l \in \mathbb{R} \quad \mid \quad \forall a \in A \quad l \leq a,$$

т. е. A имеет хотя бы одну нижнюю границу.

Наконец, множество называется *ограниченным*, если оно ограничено сверху и снизу.

Комментарий к определению. Верхних (как и нижних) границ может быть много. Например, для множества $[0, 1]$ любое число $u \geq 1$ является верхней границей.

Верхней или нижней границы может не быть. Например, $[0, \infty)$ имеет нижнюю границу, а верхнюю не имеет.

Граница может принадлежать самому множеству, а может и не принадлежать. Например, число 1 — верхняя граница для $[0, 1]$, а вот для множества $(0, 1)$ найти верхнюю границу в самом множестве $(0, 1)$ не удастся.

Определение
наибольшего и
наименьшего элемента
$\Downarrow$

Пусть $A \subset \mathbb{R}$.

Число $a \in A$ называется *наибольшим элементом* A, если

$$\forall x \in A \quad x \leq a.$$

Число $a \in A$ называется *наименьшим элементом* A, если

$$\forall x \in A \quad a \leq x.$$

Далее мы будем говорить в основном о верхних границах и наибольших элементах, понимая, что все сказанное можно повторить с соответствующими изменениями для нижних границ и наименьших элементов.

Верхняя граница и наибольший элемент. Между понятиями верхней границы и наибольшего элемента при всей схожести есть существенное отличие. Дело в том, что наибольший элемент обязан принадлежать самому множеству, а верхняя граница — нет. Поэтому верхних границ может быть много, а наибольший элемент, если вообще существует, всегда один. Кроме того, множество даже ограниченное сверху может не иметь наибольшего элемента. Например, таков интервал $(0,1)$.

Наибольший и максимальный элементы. Кроме понятия наибольшего элемента есть еще понятие максимального элемента. Элемент $a \in A$ называется максимальным, если

$$\forall x \in A \quad x \text{ сравним с } a \to x \leq a.$$

Таким образом, максимальный элемент — это тот, который больше (или равен) всех, с которыми он сравним, в то время как наибольший больше (или равен) всех без исключения. Поскольку все числа сравнимы, в $\mathbb{R}$ понятия наибольшего и максимального элементов совпадают. В любом случае наибольший всегда максимален. Максимальный же может и не быть наибольшим, если в множестве есть несравнимые элементы.

Примером множества, в котором не все элементы сравнимы, является колода карт. Если козырь не выбран, каждый из четырех тузов является максимальным элементом, наибольшего при этом нет. Если же выбран козырь, то козырный туз — наибольший элемент, который конечно же максимален. Все шестерки кроме козырной будут минимальными элементами, а наименьшего не будет вовсе.

Следующее утверждение — еще одно проявление полноты $\mathbb{R}$.

Теорема 4
о наименьшей
верхней границе
$\Downarrow$
Теоремы 5, 16

Пусть $A \subset \mathbb{R}$ <u>непусто</u> и <u>ограничено</u> сверху. Тогда среди всех верхних границ множества A существует наименьшая.

Доказательство Пусть B — множество всех верхних границ A, т.е.

$$B = \{u \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A \quad x \leq u\}.$$

Легко увидеть, что A и B удовлетворяют условиям теоремы 1. Действительно,

$$\forall x \in A \quad \forall u \in B \quad x \leq u.$$

Кроме того множества A и B непусты: A по предположению, а B потому что A ограничено сверху, т. е. имеет хотя бы одну верхнюю границу. По теореме 1 найдется $c \in \mathbb{R}$ такое, что

Теорема 1 →

$$\forall x \in A \quad \forall u \in B \quad x \leq c \leq u.$$

Левое неравенство означает, что c — верхняя граница, а правое неравенство означает, что c, будучи элементом B, — наименьший элемент B. **Теорема доказана.**

Аналогично доказывается существование наибольшей нижней границы непустого ограниченного снизу числового множества.

Определение
точных границ
⇓

> *Наименьшая верхняя граница*, существование которой доказано в теореме 4, называется также *точной верхней границей* A, *верхней гранью* A или *супремумом* A и обозначается $\sup A$.
>
> *Наибольшая нижняя граница* называется также *точной нижней границей* A, *нижней гранью* A или *инфимумом* A и обозначается $\inf A$.

Для рассмотрения случаев неограниченного и пустого множества нам потребуется понятие расширенной числовой прямой.

Определение
расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}$
⇓

> *Расширенной числовой прямой* $\overline{\mathbb{R}}$ называется множество
>
> $$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\},$$
>
> получающийся добавлением к $\mathbb{R}$ двух формальных элементов $-\infty$ и $+\infty$. При этом считается по определению, что
>
> $$\forall x \in \mathbb{R} \quad -\infty < x < +\infty.$$

Теорема 5
о точных границах в $\overline{\mathbb{R}}$
⇓
Теорема 16

> Любое множество $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ имеет точную верхнюю и точную нижнюю границы (в $\overline{\mathbb{R}}$).

теорема 4 →

Доказательство. Докажем существование точной верхней границы. Если множество непусто и ограничено сверху, то нужно сослаться на теорему 4.

Пусть A непусто, но не ограничено сверху, т.е. не имеет ни одной верхней границы в $\mathbb{R}$. Тогда множество его верхних границ состоит из единственного элемента $+\infty$. Этот элемент и будет точной верхней границей.

Пусть теперь $A = \emptyset$. Тогда любой элемент из $\overline{\mathbb{R}}$ является его верхней границей. Наименьший элемент в $\overline{\mathbb{R}}$ — это $-\infty$. Таким образом, как это ни парадоксально, $\sup \emptyset = -\infty$. Кстати, аналогично доказывается, что $\inf \emptyset = +\infty$. **Теорема доказана.**

На практике часто используется следующий критерий.

Теорема 6
критерий точной верхней границы
$\Downarrow$
Теоремы 16, , 28, 33, 34

> Пусть $A \subset \mathbb{R}$ <u>непусто</u> и ограничено сверху, $a \in \mathbb{R}$.
>
> $$a = \sup A \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} a \text{ — верхняя граница } A, \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad | \quad a - \varepsilon < x. \end{cases}$$

Для нижней границы верно аналогичное утверждение.

Доказательство

Необходимость. Пусть $a = \sup A$. Точная верхняя граница по определению является верхней границей, так что первый пункт выполняется автоматически. Докажем второй пункт МЕТОДОМ ОТ ПРОТИВНОГО. Предположим, что утверждение второго пункта неверно, т. е.

$$\exists \varepsilon > 0 \ | \ \forall x \in A \quad a - \varepsilon \geq x.$$

Но это означает, что число $a - \varepsilon$ — верхняя граница, причем она заведомо меньше чем a, что ПРОТИВОРЕЧИТ тому, что a — наименьшая верхняя граница.

Достаточность. Предположим, что для некоторого числа a выполнены оба условия и докажем, что $a = \sup A$. В силу первого условия a — верхняя грань. Докажем, что a — наименьшая МЕТОДОМ ОТ ПРОТИВНОГО. Предположим, что это неверно. Тогда существует верхняя грань a' такая, что $a' < a$. Взяв $\varepsilon = a - a'$ (тогда $a' = a - \varepsilon$), по пункту 2 найдем число $x \in A$ такое, что $a' < x$. Но это означает, что a' не может быть верхней гранью — ПРОТИВОРЕЧИЕ. **Теорема доказана.**

2.5. Биномиальная формула.

Определение
биномиальных коэффициентов
$\Downarrow$

> Пусть n, k — неотрицательные целые числа. Число
>
> $$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
>
> называется *числом сочетаний из n по k* или *биномиальным коэффициентом.* (Напомним, что *факториал* $n!$ — это произведение всех чисел от 1 до n, если $n \in \mathbb{N}$, и $0! = 1$ по определению.)

О биномиальных коэффициентах. Поясним, почему C_n^k называется числом сочетаний. Для начала предположим, что имеется n предметов и n ячеек. Пользуясь принципом математической индукции, можно показать, что существует ровно $n!$ различных способов разложить эти предметы по ячейкам. Действительно, для $n = 1$ и $n = 2$ это очевидно. Для бóльших n нужно понять, что мы имеем ровно n способов занять первую ячейку, после чего приходим к задаче размещения $n-1$ предметов по $n-1$ ячейкам, а для нее ответ уже получен на предыдущем шаге: $(n-1)!$. Итого, $n(n-1)! = n!$.

Теперь предположим, что из n предметов нам нужно выбрать k штук, причем порядок, в котором эти k предметов выбираются, не важен. Для этого рассмотрим опять n ячеек, отметим первые k ячеек как нужные, и рассмотрим все возможные способы раскладки всех n предметов по всем ячейкам. Их, как мы знаем, $n!$. Поскольку порядок, в котором нужные нам предметы попали в первые k ячеек, равно как и порядок, в котором ненужные предметы попали в остальные $n-k$ ячеек, не важен, мы должны отождествить, т. е. считать одинаковыми, расклады, которые получаются перестановкой в первых k и последних $n-k$ ячейках. Математически это означает, что нужно поделить $n!$ на $k!$ и $(n-k)!$.

Полезно знать формулу

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k,$$

которая строго выражает тот факт, что C_n^k строятся по треугольнику Паскаля

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&& 1 &&&&& \\ &&&& 1 && 1 &&&& \\ &&& 1 && 2 && 1 &&& \\ && 1 && 3 && 3 && 1 && \\ & 1 && 4 && 6 && 4 && 1 & \\ 1 && 5 && 10 && 10 && 5 && 1 \\ &&&&& \dots &&&&& \end{array},$$

в котором любой элемент равен сумме двух стоящих над ним.

Теорема 7
биномиальная формула
$\Downarrow$
Теорема 8

> Для $a, b \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ имеет место биномиальная формула
>
> $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = C_n^0 a^n + C_n^1 a b^{n-1} + \dots + C_n^{n-1} a^{n-1} b + C_n^n b^n.$$

Доказательство Дописать! **Теорема доказана.**

2.6. Извлечение корней. В качестве упражнения на применение теоремы Дедекинда, понятия наибольшего элемента и биномиальной формулы докажем существование корня степени n из положительного числа. 5 лекция

Определение
корня натуральной степени
$\Downarrow$

> *Корнем натуральной степени n из $a > 0$* называется положительное число c такое, что $c^n = a$. Для корня степени n используется обозначение $\sqrt[n]{a}$ или $a^{1/n}$.

Теорема 8
о существовании корня
$\Downarrow$

> Число $a > 0$ имеет корень любой натуральной степени n, причем ровно один.

Доказательство

Шаг 1 (построение корня). Построим корень, пользуясь теоремой Дедекинда. Пусть

$$A = \{x > 0 \mid x^n < a\}, \quad B = \{y > 0 \mid a < y^n\}.$$

Множества A и B не пусты, так как

$$\begin{aligned}
&\text{при} \quad 0 < a < 1 \quad a \in A, \quad 1 \in B, \\
&\text{при} \quad a = 1 \quad 1/2 \in A, \quad 2 \in B, \\
&\text{при} \quad a > 1 \quad 1 \in A, \quad a \in B.
\end{aligned}$$

Кроме того, в силу строгого возрастания фукнции $x \mapsto x^n$ и определения A и B

$$\forall x \in A \quad \forall y \in B \quad x < y.$$

Теорема 1 $\to$

По теореме 1

$$\exists c \in \mathbb{R} \ \mid \ \forall x \in A \quad \forall y \in B \quad x \leq c \leq y.$$

Шаг 2 ($c \notin A$). ?Переписать! Покажем, что $c \notin A$ и $c \notin B$. Тогда останется единственная возможность $c^n = a$. Докажем сначала, что $c \notin A$. Если бы c принадлежал A, то был бы там наибольшим элементом. Значит, достаточно доказать, что A не содержит наибольшего элемента. Сделаем это методом от противного. Предположим, что $x \in A$ — наибольший элемент и придем к противоречию. Для этого достаточно указать такое число z, что $x^n < z^n < a$. Наконец, существование такого z вытекает из следующего неравенства: **?!**

$$\begin{aligned}
(x+\varepsilon)^n &= x^n + \sum_{k=1}^{n} C_n^k \varepsilon^k x^{n-k} \quad \text{(биномиальная формула)} \\
&\leq x^n + \varepsilon \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^{n-k} \quad \text{(при } 0 < \varepsilon < 1 \text{ верно } \varepsilon^k \leq \varepsilon) \\
&= x^n + \varepsilon \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^k x^{n-k} - x^n \right) \quad \text{(добавим к сумме } x^n \text{ и вычтем)} \\
&= x^n + \varepsilon \left((x+1)^n - x^n \right) \quad \text{(снова биномиальная формула).}
\end{aligned}$$

Действительно, нужно взять $z = x + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ настолько мало, что

$$x^n + \varepsilon\left((x+1)^n - x^n\right) < a$$

т. е.

$$\varepsilon < \frac{a - x^n}{(x+1)^n - x^n}.$$

Шаг 3 ($c \notin B$). Аналогично, нужно доказать, что B не содержит наименьшего элемента. Для этого используем неравенство

$$\left(\frac{y}{1+\varepsilon}\right)^n \geq \frac{y^n}{1 + \varepsilon(2^n - 1)},$$

которое вытекает из неравенства

$$(x+\varepsilon)^n \le x^n + \varepsilon((x+1)^n - x^n),$$

полученного на предыдущем шаге, если положить $x = 1$. Действуя методом от противного, предположим что $y \in B$ — наименьший элемент и построим z такой, что $a < z^n < y^n$. В силу указанного неравенства нужно взять z в виде $z = y/(1+\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ настолько мало, что

$$a < \frac{y^n}{1+\varepsilon(2^n-1)},$$

т. е.

$$0 < \varepsilon < \frac{y^n/a - 1}{2^n - 1}.$$

Наличие такого $z \in B$ означает, что y не может быть наименьшим. Противоречние.

Шаг 4 (единственность). Единственность следует из строгого возрастания степенной функции $x \mapsto x^n$. **Теорема доказана.**

§ 3. Предел последовательности

3.1. Сходящиеся последовательности.

Определение
последовательности
⇓

Последовательность — это функция с областью определения $\mathbb{N}$. Задать последовательность значит указать правило сопоставляющее каждому $n \in \mathbb{N}$ вещественное число $x(n)$. Исторически сложилось так, что для $x(n)$ используют обозначение x_n и называют n-м членом последовательности. Мы будем использовать обозначение x_n и для самой последовательности, т. е. функции, и для ее n-го члена.

Замечание. Можно понимать последовательность как множество элементов занумерованных в определенном порядке. Эта точка зрения объясняет обозначение x_n. Однако, мы все-таки будем считать последовательность функцией.

Определение
предела
последовательности
⇓

Говорят, что *последовательность* x_n *сходится к числу* $a \in \mathbb{R}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \mid \ \forall n \geq n_0 \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

При этом также говорят, что a — *предел последовательности* x_n и пишут $x_n \to a$ или $\lim x_n = a$.

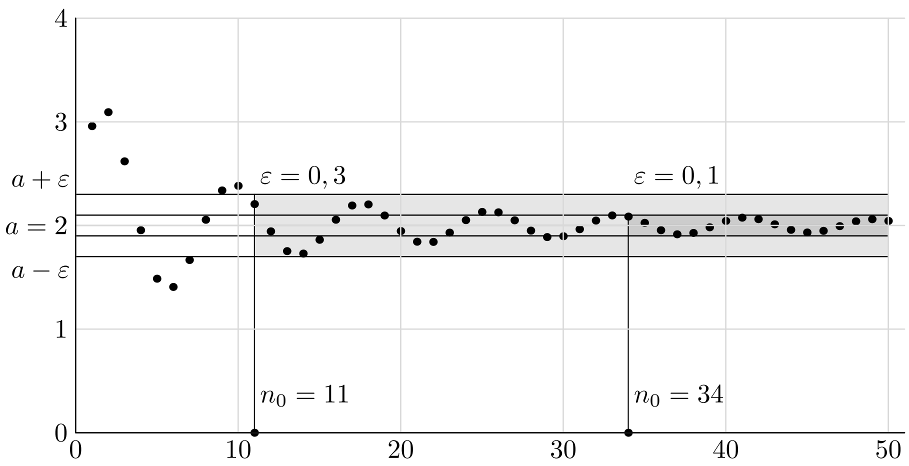
Записывая предыдущее определение, обычно произносят следующие слова, которые любой студент должен знать наизусть: «последовательность x_n стремится к числу a, если для любого сколь угодно малого положительного ε найдется номер n_0 (вообще говоря, зависящий от ε), начиная с которого все члены последовательности x_n лежат в интервале $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$».

Комментарий к определению. Поймем, почему сложное высказывание с тремя кванторами действительно отражает наше интуитивное понятие предела.

Для начала заметим, что связка кванторов $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$ означает, что вопрос о том является ли число a пределом последовательности x_n решается в ходе бесконечной цепочки экспериментов, в которой нам задаются всевозможные $\varepsilon > 0$, а мы подыскиваем подходящие номера n_0 такие, что … При этом номер n_0 вообще говоря каждый раз зависит от ε

Проведем серию подобных экспериментов с последовательностью

$$x_n = \frac{70 \sin(4n/5)}{(2n+12)^{3/2}} + 2.$$



Из графика интуитивно понятно, что $x_n \to a = 2$. Предположим, что нам дано $\varepsilon = 0,3$. Нарисуем прямые, соответствующие числам $a \pm \varepsilon$. Получится коридор. Опять же из графика видно, что начиная с номера $n_0 = 11$ все члены x_n лежат в коридоре, т. е.

$$\forall n \geq n_0 \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Тот же эксперимент с $\varepsilon = 0,1$ так же будет удачным, если взять $n_0 = 34$. Заметим, что уменьшение ε приводит к ужесточению требования, и как следствие к увеличению n_0.

Проделав несколько удачных экспериментов, мы обретаем уверенность в том, что $a = 2$ действительно предел x_n. Однако, для строгого доказательства мы должны провести бесконечную серию удачных экспериментов со всевозможными $\varepsilon > 0$. Этого можно избежать, если придумать универсальный алгоритм (для данной последовательности), который по любому $\varepsilon > 0$ будет давать подходящий номер n_0. Для разработки такого алгоритма нужно начать с конца условия $\forall \varepsilon > 0 \ldots$, т.е. с неравенства

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

ибо именно оно в конечном счете должно выполняться после выбора n_0. Для нашей последовательности неравенство имеет вид

$$\left| \frac{70 \sin(4n/5)}{(2n+12)^{3/2}} \right| < \varepsilon.$$

Оценим сверху модуль:

$$\left| \frac{70 \sin(4n/5)}{(2n+12)^{3/2}} \right| \leq \frac{70}{(2n+12)^{3/2}}$$

и заметим, что правая часть монотонно убывает по n. Значит, выбрав n_0 по $\varepsilon > 0$ так, чтобы

$$\frac{70}{(2n_0+12)^{3/2}} < \varepsilon,$$

мы обеспечим выполнение неравенства

$$\left| \frac{70 \sin(4n/5)}{(2n+12)^{3/2}} \right| \leq \frac{70}{(2n+12)^{3/2}} \leq \frac{70}{(2n_0+12)^{3/2}} < \varepsilon$$

для всех $n \geq n_0$. Очевидно, нужно взять

$$n_0 = \left[\frac{(70/\varepsilon)^{2/3} - 12}{2}\right] + 1,$$

где [ ] обозначает целую часть числа. Финт со взятием целой части и добавлением единицы связан с тем, что n_0 должно быть целым, а неравенство строгим. Таким образом, мы, действуя строго по определению, доказали, что $x_n \to 2$.

Итак, доказать, что $x_n \to a$ по определению, означает найти такой алгоритм, который по любому $\varepsilon > 0$ дает подходящее n_0. При построении такого алгоритма начинать нужно с рассмотрения неравенства $|x_n - a| < \varepsilon$.

Обозначение $\lim x_n$ подразумевает, что предел последовательности, если вообще существует, является вполне определенным числом, т.е. единственнен. Мы убедились в этом на примере. Однако, этот верный и вполне естественный факт требует доказательства в общем случае.

Теорема 9
о единственности предела
$\Downarrow$

> Если $x_n \to a$ и $x_n \to b$, то $a = b$.

Доказательство. Дано

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} \ | \ \forall n \geq n_1 \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon, \tag{$*$}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_2 \in \mathbb{N} \ | \ \forall n \geq n_1 \quad b - \varepsilon < x_n < b + \varepsilon. \tag{$\dagger$}$$

Надо

$$a = b.$$

Докажем теорему методом от противного. Предположим, что $a \neq b$, а именно $a < b$ (случай $b > a$ рассматривается аналогично). Поскольку ($*$) и ($\dagger$) нам даны, мы вправе сами выбирать любое $\varepsilon > 0$ и получать по нему n_1 и n_2. Возьмем $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$ (тогда $a + \varepsilon = b - \varepsilon = \frac{a+b}{2}$) и получим соответствующие n_1 и n_2. Тогда одновременно

$$\forall n \geq n_1 \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$$
$$\forall n \geq n_2 \quad b - \varepsilon < x_n < b + \varepsilon,$$

откуда

$$\forall n \geq \max\{n_1, n_2\} \quad x_n < \frac{a+b}{2} \quad \text{и} \quad \frac{a+b}{2} < x_n,$$

противоречие. Значит, $a = b$. **Теорема доказана.**

3.2. Бесконечные пределы.

Определение
бесконечного предела
$\Downarrow$

> Говорят, что *последовательность* x_n *стремится к* $+\infty$, если
>
> $$\forall E > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \ | \ \forall n \geq n_0 \quad x_n > E.$$
>
> При этом пишут $x_n \to +\infty$ или $\lim x_n = +\infty$. Аналогично, *последовательность* x_n *стремится к* $-\infty$, если
>
> $$\forall E > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \ | \ \forall n \geq n_0 \quad x_n < -E.$$

Слова которые при этом говорят таковы: «Последовательность x_n стремится к $+\infty$, если для любого (сколь угодно большого) E найдется номер n_0, начиная с которого все члены последовательности больше E.»

Отметим, что слово «стремится» можно использовать как в случае конечного предела, так и в случае бесконечного, в то время как слово «сходится» относится только к случаю конечного предела.

6 лекция

Определение
бесконечно большой и бесконечно малой последовательности
$\Downarrow$

> Последовательность x_n называется *бесконечно большой*, если $|x_n| \to +\infty$.
>
> Последовательность x_n называется *бесконечно малой*, если $x_n \to 0$.

Замечание. Если $x_n \to +\infty$ или $x_n \to -\infty$, то x_n — бесконечно большая. Обратное верно не всегда. Например, последовательность $x_n = (-1)^n n$ бесконечно большая, но ни к какой из двух бесконечностей не стремится и вообще предела никакого не имеет.

Теорема 10
о бесконечно малых и бесконечно больших
$\Downarrow$
??

> Пусть последовательность x_n такова, что $x_n \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда
>
> $$x_n \text{ бесконечно большая} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{x_n} \text{ бесконечно малая.}$$

Доказательство.

Необходимость. Дано

$$\forall E > 0 \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} \ \mid \ \forall n \geq n_1 \quad |x_n| > E. \tag{$*$}$$

Надо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_2 \in \mathbb{N} \ \mid \ \forall n \geq n_2 \quad \left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon. \tag{$\dagger$}$$

Связка $\forall E > 0 \quad \exists n_1 \in \mathbb{N}$ в $(*)$ означает, что мы сами можем выбирать $E > 0$ и получать n_1, а та же связка в $(\dagger)$ означает, что нам будет задано $\varepsilon > 0$, а мы должны подобрать n_2. Этот выбор будем осуществлять в следующем порядке

$$\varepsilon \xrightarrow{?} E \xrightarrow{(*)} n_1 \xrightarrow{?} n_2.$$

Выберем E по ε так: $E = 1/\varepsilon$, поскольку при таком выборе неравенства

$$\left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |x_n| > E$$

равносильны, а n_2 возьмем просто равным n_1. Легко проверить, что при таком выборе n_2 по ε

$$\forall n \geq n_2 \quad \left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon.$$

Достаточность. Аналогично, только здесь $(*)$ и $(\dagger)$ меняются местами и выбор n_1 по E происходит следующим образом

$$E \longrightarrow \varepsilon = \frac{1}{E} \xrightarrow{(\dagger)} n_1 \longrightarrow n_2 = n_1.$$

Теорема доказана.

3.3. Предел и неравенства.

Теорема 11
о пределе последовательности и неравенстве
⇓
Теорема 12, 21, 34, 35, 42, 42

Пусть $x_n \to a$ и $y_n \to b$, где $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.

- Если $a < b$, то
$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 \quad x_n < y_n.$$
- Если
$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 \quad x_n \leq y_n,$$
то $a \leq b$.

Доказательство

Шаг 1 (первое утверждение в случае $\boldsymbol{a, b} \in \mathbb{R}$). Дано

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_1 \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \tag{$*$}$$
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_2 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_2 \quad b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon. \tag{$\dagger$}$$

Надо
$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 \quad x_n < y_n. \tag{$\ddagger$}$$
Выберем $\varepsilon = (b - a)/2$ (при этом $b - \varepsilon = a + \varepsilon$) и по $(*)$, $(\dagger)$ получим $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Полагая $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, мы гарантируем, что

$$\forall n \geq n_0 \quad x_n < a + \varepsilon = b - \varepsilon < y_n,$$

а это и есть $(\ddagger)$

Шаг 2 (первое утверждение в случае бесконечных пределов). Аналогично.

Шаг 3 (второе утверждение). Докажем методом от противного, используя уже доказанное первое утверждение. Предположим, что $a > b$. Тогда по шагу 1
$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 \quad x_n > y_n,$$
а это противоречит условию

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 \quad x_n \leq y_n,$$

Теорема доказана.

Теорема 12
о зажатой последовательности
⇓
Теоремы 17, , , 19, 21, 22, 23, 24, 32, 36, 38, 40

Пусть x_n, y_n, z_n — последовательности такие, что

- $x_n \to a$ и $y_n \to a$, где $a \in \overline{\mathbb{R}}$,
- $x_n \leq z_n \leq y_n$ для всех достаточно больших n.

Тогда $z_n \to a$.

Доказательство Докажем теорему в случае конечного предела a. Случай бесконечного предела рассматривается аналогично.

Дано

$$\forall\varepsilon_1 > 0 \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} \ | \ \forall n \geq n_1 \quad a - \varepsilon_1 < x_n < a + \varepsilon_1; \tag{$*$}$$

$$\forall\varepsilon_2 > 0 \quad \exists n_2 \in \mathbb{N} \ | \ \forall n \geq n_2 \quad a - \varepsilon_2 < y_n < a + \varepsilon_2; \tag{$\dagger$}$$

$$\exists n_3 \in \mathbb{N} \ | \ \forall n \geq n_3 \quad x_n \leq z_n \leq y_n; \tag{$\ddagger$}$$

Надо

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \ | \ \forall n \geq n_0 \quad a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon;$$

Мы должны, осуществить следующую цепочку действий

$$\varepsilon \longrightarrow \varepsilon_1, \varepsilon_2 \xrightarrow{(*),\,(\dagger),\,(\ddagger)} n_1, n_2, n_3 \longrightarrow n_0.$$

Глядя на неравенства в конце $(*)$, $(\dagger)$, $(\ddagger)$, сделаем это следующим образом

$$\varepsilon_1 = \varepsilon, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon, \quad n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}.$$

При таком выборе, очевидно получается

$$\forall n \geq n_0 \quad a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Теорема 13
об ограниченности сходящейся последовательности
⇓
Теорема OPrPoIAlOp

<u>Сходящаяся</u> последовательность ограничена.

Доказательство Дано

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \ | \ \forall n \geq n_0 \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon. \tag{$*$}$$

Надо

$$\exists l, u \in \mathbb{R} \ | \ \forall n \in \mathbb{N} \quad l \leq x_n \leq u.$$

Поскольку связка $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$ опять встречается в том, что дано, мы можем выбирать ε любым нужным нам образом. Сделаем это очень просто: $\varepsilon = 1$. Тогда все члены начиная с n_0 будут лежать в интервале $(a-1, a+1)$. Кроме них останутся члены $x_1, \ldots, x_{n_0-1}$. Поскольку их конечное число мы можем выбрать из их максимальный и минимальный. Итак, искомые числа l, u выбираются так

$$u = \max\{a+1, x_1, \ldots, x_{n_0-1}\}, \quad l = \min\{a-1, x_1, \ldots, x_{n_0-1}\}.$$

Теорема доказана.

3.4. Предел и арифметические операции.

Теорема 14
о бесконечно малых
⇓
OPrPoIAlOp

Пусть x_n и y_n — две последовательности.

- Если x_n и y_n бесконечно малые, то $x_n \pm y_n$ тоже бесконечно малая.
- Если x_n бесконечно малая, а y_n ограниченная, то $x_n y_n$ бесконечно малая.

Доказательство

Шаг 1 (сумма). Докажем утверждение для суммы (для разности аналогично). Дано

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} \ \mid\ \forall n \geq n_1 \quad |x_n| < \varepsilon_1, \tag{$*$}$$
$$\forall \varepsilon_2 > 0 \quad \exists n_2 \in \mathbb{N} \ \mid\ \forall n \geq n_2 \quad |y_n| < \varepsilon_2. \tag{$\dagger$}$$

Надо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \mid\ \forall n \geq n_0 \quad |x_n + y_n| < \varepsilon,$$

Для доказательства нам нужно осуществить следующую цепочку действий:

$$\varepsilon \longrightarrow \varepsilon_1, \varepsilon_2 \xrightarrow{(\dagger)} n_1, n_2 \longrightarrow n_0.$$

Глядя на неравенства в ($*$) и ($\dagger$) и вспоминая неравенство треугольника

$$|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n|,$$

мы понимаем, что ε_1 и ε_2 в сумме должны давать ε. Поскольку мы можем выбирать ε_1 и ε_2 сами, сделаем это самым простым и естественным образом: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$. Далее получив по ним n_1, n_2, положим как и раньше $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$.

Шаг 2 (произведение). Дано

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} \ \mid\ \forall n \geq n_1 \quad |x_n| < \varepsilon_1, \tag{$*$}$$
$$\exists c > 0 \ \mid\ \forall n \in \mathbb{N} \quad |y_n| < c. \tag{$\dagger$}$$

Надо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \mid\ \forall n \geq n_0 \quad |x_n y_n| < \varepsilon,$$

Для доказательства нам нужно осуществить следующую цепочку действий:

$$\varepsilon \longrightarrow \varepsilon_1 \xrightarrow{(\dagger)} n_1 \longrightarrow n_0.$$

Глядя на неравенства в ($*$) и ($\dagger$) и записывая тривиальную оценку

$$|x_n y_n| \leq |x_n| c,$$

мы понимаем, что ε_1 нужно выбрать так: $\varepsilon_1 = \varepsilon / c$. Получив n_1 и положив $n_0 = n_1$, мы будем иметь

$$\forall n \geq n_0 \quad |x_n y_n| \leq |x_n| c < \frac{\varepsilon}{c} c = \varepsilon,$$

что нам и нужно. **Теорема доказана.**

7 лекция

Теорема 15
о пределе последовательности и алгебраических операциях
⇓
Теоремы 26, 35, 36, 41

Если $x_n \to a$ и $y_n \to b$, причем пределы a и b конечны, то

- $x_n \pm y_n \to a \pm b$;
- $x_n y_n \to ab$;
- $x_n / y_n \to a/b$ (при дополнительном условии, что все y_n и b не равны нулю);

Доказательство В доказательстве мы будем пользоваться следующим очевидным фактом, который непосредственно вытекает из определения предела:

$$x_n \to a \quad \Longleftrightarrow x_n - a \to 0, \quad \text{т. е. } x_n - a \text{ — бесконечно малая.}$$

Теорема 14 → **Шаг 1 (сумма).** По предыдущей теореме из того, что

$$x_n - a \to 0, \quad y_n - b \to 0,$$

немедленно следует, что

$$(x_n \pm y_n) - (a \pm b) = (x_n - a) \pm (y_n - b) \to 0.$$

Теоремы 13, 14 → **Шаг 2 (произведение).** Заметим, что по теореме 13 x_n, будучи сходящейся последовательностью, ограничена. Привлекая снова предыдущую теорему, запишем следующую цепочку

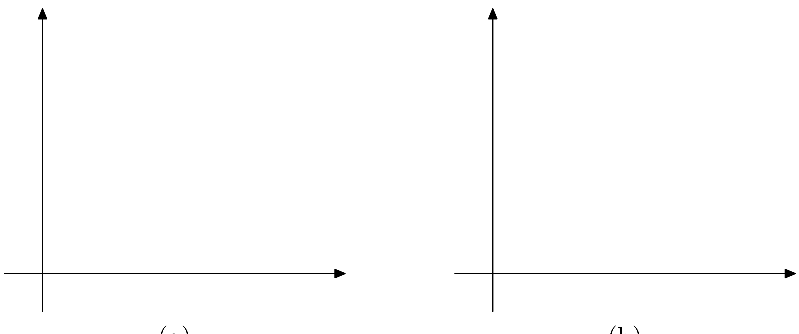
$$x_n y_n - ab = x_n y_n - x_n b + x_n b - ab = \underbrace{x_n}_{\text{огр.}} \underbrace{(y_n - b)}_{\to 0} + \underbrace{(x_n - a)}_{\to 0} \underbrace{b}_{\text{огр.}} \to 0$$

Теоремы 13, 14 → **Шаг 3 (отношение).** В случае отношения результат получается по аналогии с предыдущим шагом из цепочки

$$\begin{aligned} \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} &= \frac{x_n b - a y_n}{y_n b} = \frac{x_n b - x_n y_n + x_n y_n - a y_n}{y_n b} \\ &= \underbrace{\frac{1}{y_n b}}_{\text{огр.}} \underbrace{\Big(\underbrace{x_n}_{\to 0} \underbrace{(b - y_n)}_{\text{огр.}} + \underbrace{(x_n - a)}_{\to 0} \underbrace{y_n}_{\text{огр.}} \Big)}_{\to 0} \to 0. \end{aligned}$$

Осталось только понять, почему последовательность $\frac{1}{y_n b}$ ограничена. Имеем $y_n \to b \neq 0$ или подробнее

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \mid \ \forall n \geq n_0 \quad b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon.$$



(a) (b)

Выбрав $\varepsilon = |b|/2$, мы получим $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\begin{aligned} &\forall n \geq n_0 \quad b/2 < y_n, \quad \text{если } b > 0, \\ &\forall n \geq n_0 \quad y_n < b/2, \quad \text{если } b < 0, \end{aligned}$$

т. е. в любом случае

$$\forall n \geq n_0 \quad 0 < \frac{1}{y_n b} < \frac{2}{b^2}.$$

Таким образом, все члены начиная с номера n_0 ограничены числом $2/b^2$. Среди оставшихся $n_0 - 1$ первых членов можно найти максимум. В итоге

$$\left|\frac{1}{y_n b}\right| \leq \max\left\{\frac{2}{b^2}, \frac{1}{|y_1 b|}, \dots, \frac{1}{|y_{n_0-1} b|}\right\}.$$

Теорема доказана.

3.5. Теоремы существования. Теорема существования — это теорема, которая устанавливает существование некоторого объекта. Можно сказать, что теорема Дедекинда, принцип вложенных отрезков, теорема о точной верхней границе — это все теоремы существования. Нам предстоит разобраться, когда последовательность имеет предел. Оказывается, существует две ситуации, в которых последовательность заведомо имеет предел. А именно, если последовательность монотонна или фундаментальна.

Определение
монотонной
последовательности
⇓

Последовательность x_n называется

неубывающей, если $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} \geq x_n$,

невозрастающей, если $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} \leq x_n$,

возрастающей, если $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} > x_n$,

убывающей, если $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} < x_n$.

Невозрастающие и неубывающие последовательности называются *монотонными*, а возрастающие и убывающие — строго *монотонными.*

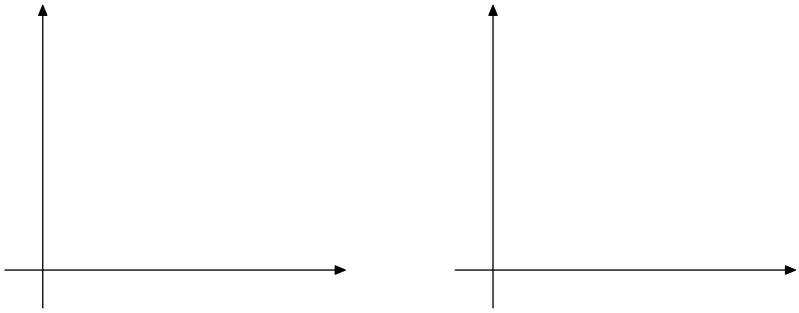
Теорема 16
Вейерштрасса
о монотонной
последовательности
⇓
Теоремы 21, , 42

Любая монотонная последовательность имеет предел. Причем, предел конечен тогда и только тогда, когда последовательность ограничена.

Доказательство

Шаг 1 (кандидат на роль предела). Предположим для определенности, что последовательность неубывающая. В качестве кандидата на роль предела, как видно из рисунка, стоит взять элемент $a = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, который существует по теореме 5.

Теорема 5 →



(a) (b)

Шаг 2 ($x_n \to a$ в случае ограниченной последовательности). В этом случае по теореме о наименьшей верхней границе $a < +\infty$. Докажем, что $a = \lim x_n$.

Теорема 4 →

Дано

Теорема 6) →

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \le a \quad (a \text{ — верхняя граница}) \qquad (*)$$

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} \;\mid\; a - \varepsilon_1 < x_{n_1} \quad (\text{Теорема } 6) \qquad (\dagger)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} \ge x_n \quad (\text{монотонность}) \qquad (\ddagger)$$

Надо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\mid\; \forall n \ge n_0 \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Выбор n_0 по ε происходит следующим тривиальным образом

$$\varepsilon \longrightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon \xrightarrow{(*)} n_1 \longrightarrow n_0 = n_1.$$

При этом в силу монотонности

$$\forall n \ge n_0 \quad a - \varepsilon < x_{n_0} \le x_n \le a < a + \varepsilon.$$

Шаг 3 ($x_n \to a$ в случае неограниченной последовательности). В этом случае $a = +\infty$ (см. доказательство теоремы 5). Докажем, что $\lim x_n = +\infty$.

Теорема 5 →

Дано

$$\forall E_1 > 0 \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} \;\mid\; x_{n_1} > E_1 \quad (\text{неограниченность сверху}) \qquad (*)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} \ge x_n \quad (\text{монотонность}) \qquad (\dagger)$$

Надо

$$\forall E > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\mid\; \forall n \ge n_0 \quad x_n > E.$$

Выбор n_0 по E происходит следующим тривиальным образом

$$E \longrightarrow E_1 = \varepsilon \xrightarrow{(*)} n_1 \longrightarrow n_0 = n_1.$$

При этом в силу монотонности

$$\forall n \ge n_0 \quad x_n \ge x_{n_0} > E.$$

Теорема доказана.

Если у нас есть претендент на роль предела, мы можем проверить, будет он пределом или нет просто по определению. Если же его нет, то нужно условие, в которое значение предела не входит. Таким условием является условие Коши.

Определение
фундаментальной
последовательности
⇓

Последовательность x_n называется *фундаментальной*, если она удовлетворяет *условию Коши*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \mid \ \forall n, m \geq n_0 \quad |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Теорема 17
критерий Коши
для последовательностей
⇓
Теоремы 29

Последовательность x_n сходится $\iff$ x_n фундаментальна.

Доказательство.

Шаг 1 (необходимость). Дано

$$\exists a \in \mathbb{R} \quad \mid$$
$$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} \ \mid \ \forall n \geq n_1 \quad |x_n - a| < \varepsilon_1. \qquad (*)$$

Надо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \mid \ \forall n, m \geq n_0 \quad |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

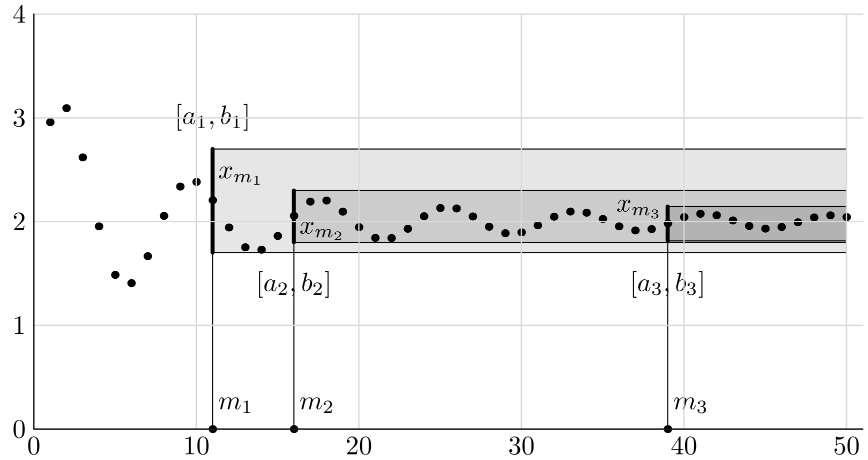
Выбор n_0 по ε происходит следующим образом

$$\varepsilon \longrightarrow \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} \xrightarrow{(*)} n_1 \longrightarrow n_0 = n_1.$$

При таком выборе в силу неравенства треугольника мы имеем

$$\forall n, m \geq n_0 \quad |x_n - x_m| \leq |x_n - a| + |a - x_m| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Шаг 2 (достаточность; применение принципа вложенных отрезков). Построим число c, которое будет пределом x_n, пользуясь принципом вложенных отрезков. Для этого нужно построить последовательность отрезков с некоторыми свойствами. Подробнее.



Дано
$$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} \ \mid \ \forall n, m \geq n_1 \quad |x_n - x_m| < \varepsilon$$
Надо построить последовательность отрезков $[a_k, b_k]$ и последовательность номеров m_k такие, что
$$\forall k \in \mathbb{N} \quad [a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k],$$
$$b_k - a_k \leq \frac{1}{k}$$
$$\forall n \geq m_k \quad x_n \in [a_k, b_k].$$

Строим первый отрезок $[a_1, b_1]$. Для этого выберем $\varepsilon_1 = 1/2$ и получим по $(*)$ номер n_1 такой, что
$$\forall n, m \geq n_1 \quad |x_n - x_m| < \varepsilon_1 = \frac{1}{2}.$$
Возьмем в качестве m_1 номер n_1 и заметим, что, в частности, при $m = m_1$
$$\forall n \geq m_1 \quad x_{m_1} - \frac{1}{2} < x_n < x_{m_1} + \frac{1}{2}.$$
Положим
$$a_1 = x_{m_1} - \frac{1}{2}, \quad b_1 = x_{m_1} + \frac{1}{2}.$$
Отрезок $[a_1, b_1]$ построен.

Аналогично строим второй отрезок $[a_2, b_2]$. Возьмем $\varepsilon_1 = 1/4$ и получим по $(*)$ номер n_1 такой, что
$$\forall n, m \geq n_1 \quad |x_n - x_m| < \varepsilon_1 = \frac{1}{4}.$$
Положим $m_2 = \max\{n_1, m_1\}$ (мы хотим, чтобы последовательность m_k была неубывающей) и заметим, что, в частности, при $m = m_2$ имеем
$$\forall n \geq m_2 \quad x_{m_2} - \frac{1}{4} < x_n < x_{m_2} + \frac{1}{4}.$$
Возьмем
$$a_2 = \max\{a_1, x_{m_2} - \frac{1}{4}\}, \quad b_2 = \min\{b_1, x_{m_2} + \frac{1}{4}\}.$$
Последующие отрезки $[a_k, b_k]$ строим аналогично, выбирая $\varepsilon_1 = \frac{1}{2k}$.

Теорема 2 →

Применяя принцип вложенных отрезков к последовательности $[a_k, b_k]$,мы получаем точку $c \in \mathbb{R}$ общую для всех отрезков.

Шаг 3 ($a_k \to c$, $b_k \to c$). Действительно, отнимая a_n от всех частей неравенства
$$a_k \leq c \leq b_k$$
получаем
$$0 \leq c - a_k \leq b_k - a_k \leq \frac{1}{k}$$

Теорема 12 →

По теореме о зажатой последовательности $c - a_k \to 0$, т. е. $a_k \to c$. Аналогично, отнимая b_n от всех частей неравенства
$$a_k \leq c \leq b_k$$

получаем

$$a_k - b_k \le c - b_k \le 0 \quad \iff \quad 0 \le b_k - c \le b_k - a_k \le \frac{1}{k},$$

Теорема 12 →

откуда следует $b_k \to c$.

Шаг 4 ($x_n \to c$). По построению ИМЕЕМ

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists m_k \in \mathbb{N} \mid \forall n \ge m_k \quad a_k \le x_n \le b_k \qquad (*)$$

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists k_0 \in \mathbb{N} \mid \forall k \ge k_0 \quad c - \varepsilon_1 < a_k \le b_k < c + \varepsilon_1. \qquad (\dagger)$$

НАДО

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \ge n_0 \quad c - \varepsilon < x_n < c + \varepsilon.$$

Выбор n_0 по ε происходит в следующей последовательности

$$\varepsilon \longrightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon \xrightarrow{(\dagger)} k_0 \longrightarrow k = k_0 \xrightarrow{(*)} m_k \longrightarrow n_0 = m_k.$$

При таком выборе n_0 получается

$$\forall n \ge n_0 \quad c - \varepsilon < a_k \le x_n \le b_k < c + \varepsilon,$$

что нам и нужно. **Теорема доказана.**

? Замечание об определении полноты **?!**

Замечание о расходимости. Отрицание условия Коши:

$$\exists \varepsilon > 0 \mid \forall n_o \in \mathbb{N} \quad \exists n, m \ge n_0 \mid |x_n - x_m| \ge \varepsilon.$$

? Пример на расходимость **?!**

3.6. Подпоследовательности и частичные пределы.

Определение
подпоследовательности
и частичного предела
⇓

Пусть x_n — последовательность, а n_k — строго возрастающая последовательность номеров, т. е.

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots .$$

Последовательность $x_{n_k} = x(n(k))$ как функция k называется *подпоследовательностью* последовательности x_n.

Если подпоследовательность x_{n_k} стремится к какому-либо пределу (конечному или бесконечному), то он называется *частичным пределом* x_n.

Комментарий к определению. Если вспомнить, что последовательность — это функция $n \mapsto x(n)$, определенная на $\mathbb{N}$, то подпоследовательность — это композиция $k \mapsto x(n(k))$ исходной последовательности $x(n)$ и строго возрастающей функции $k \mapsto n(k)$ из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$.

Можно сказать, что подпоследовательность получается вычеркиванием некоторых членов последовательности x_n (с последующим «сжатием»). Отметим, что порядок членов при этом не меняется.

Теорема 18
о пределе
подпоследовательности
⇓
Теоремы 22, 29, 34, 35

> Если последовательность x_n имеет предел, то любая ее подпоследовательность x_{n_k} стремится к тому же самому пределу.

Доказательство.

Шаг 1 ($\boldsymbol{n_k \geq k}$). Сперва, пользуясь принципом МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ, докажем, что $n_k \geq k$. Действительно, при $k = 1$ очевидно $n_1 \geq 1$. Если уже доказано, что $n_k \geq k$, то $n_{k+1} > n_k \leq k$, и значит, $n_{k+1} \geq k + 1$.

Шаг 2 (случай конечного предела). ДАНО

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \mid \forall n \geq n_0 \quad |x_n - a| < \varepsilon_1. \qquad (*)$$

НАДО

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_0 \in \mathbb{N} \ \mid \forall k \geq k_0 \quad |x_{n_k} - a| < \varepsilon.$$

Выбор k_0 по ε осуществляется следующим тривиальным образом

$$\varepsilon \longrightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon \xrightarrow{(*)} n_0 \longrightarrow k_0 = n_0.$$

При этом используется тот факт, что если $k \geq k_0 = n_0$, то подавно $n_k \geq n_0$, так как $n_k \geq k$.

Шаг 3 (случай бесконечного предела). Аналогично. **Теорема доказана.**

Замечание. Однако, если последовательность не имеет предела, это вовсе не означает, что все ее подпоследовательности тоже не имеют предела. Более того, как будет доказано в двух следующих теоремах всегда можно найти подпоследовательность имеющую предел.

Теорема 19
Больцано —
Вейерштрасса
⇓
Теоремы 20, 34, 35

> Из любой ограниченной последовательности можно выбрать <u>сходящуюся</u> подпоследовательность.

Доказательство Выведем нашу теорему из принципа вложенных отрезков. Построим последовательность отрезков $[a_k, b_k]$, а заодно и саму сходящуюся подпоследовательность x_{n_k} следующим образом. Поскольку x_n ограничена, по определению существует отрезок $[a_1, b_1]$ такой, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_1 \leq x_n \leq b_1.$$

В качестве x_{n_1} возьмем просто x_1, т. е. $n_1 = 1$.

Далее разделим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам. Из полученных двух отрезков хотя бы один содержит бесконечное число членов последовательности x_n. Возьмем в качестве $[a_2, b_2]$ любой из таких отрезков, а в качестве x_{n_2} любой член последовательности, лежащий в $[a_2, b_2]$, с номером $n_2 > n_1$.

Продолжая, мы получим последовательность отрезков $[a_k, b_k]$ и подпоследовательность x_{n_k} такие, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad b_k - a_k = \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}} \quad \text{и} \quad a_k \leq x_{n_k} \leq b_k.$$

Теорема 2 →

Теорема 12 →

Применяя принцип вложенных отрезков, получаем точку $c \in \mathbb{R}$ общую для всех $[a_k, b_k]$. Причем $a_k \to c$ и $b_k \to c$ (см. доказательство Теоремы 17, Шаг 2). Наконец, по теореме о зажатой последовательности $x_{n_k} \to c$. **Теорема доказана.**

Теорема 20
о непустоте множества частичных пределов

⇓

??

Множество частичных пределов любой последовательности непусто, т. е. из любой последовательности можно выбрать подпоследовательность имеющую предел (конечный или бесконечный).

Доказательство.

Теорема 19 →

Шаг 1 (последовательность ограничена). Если последовательность ограничена, то сошлемся на предыдущую теорему.

Шаг 2 (последовательность неограничена). Предположим теперь, что последовательность неограничена, например сверху. Это означает, что среди элементов со сколь угодно большими номерами можно найти сколь угодно большие, т. е.

$$\forall E > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \mid \; x_n > E.$$

Убедимся в этом методом от противного. Предположим, что это неверно:

$$\exists E > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \;\mid\; \forall n \geq k \quad x_n \leq E.$$

Но тогда число $c = \max\{x_1, x_2, \ldots, E\}$ — верхняя граница, противоречие.

Построим подпоследовательность x_{n_k} следующим образом. Возьмем $E = 1$, $k = 1$ и полученный n возьмем в качестве n_1. Далее положим $E = 2$, $k = n_1 + 1$ и полученный номер n возьмем в качестве n_2. Продолжая, мы построим x_{n_k}. **Теорема доказана.**

Замечание.. Оставшаяся часть пункта посвящена исследованию множества частичных пределов.

Определение
замкнутого множества

⇓

Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *замкнутым*, если для любой последовательности x_n элементов A верно

$$x_n \to a \quad \Longrightarrow \quad a \in A.$$

Теорема
о замкнутости множества частичных пределов

⇓

Теорема

Множество частичных пределов любой последовательности замкнуто в следующем смысле: если l_m — последовательность частичных пределов (т.е. $x_{n_k^m} \to l_m$ для некоторых подпоследовательностей $x_{n_k^m}$, зависящих от m) и $l_m \to l$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$, то l само является частичным пределом, т. е. существует подпоследовательность x_{n_k} стремящаяся к l.

Доказательство.

Шаг 1 (случай $l \in \mathbb{R}$). Дано

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists m_0 \in \mathbb{N} \ | \ \forall m \geq m_0 \quad l - \varepsilon_1 < l_m < l + \varepsilon_1; \qquad (*)$$
$$\forall \varepsilon_2 > 0 \quad \forall m \quad \exists k_0 \in \mathbb{N} \ | \ \forall k \geq k_0 \quad l_m - \varepsilon_2 < x_{n_k^m} < l_m + \varepsilon_2. \qquad (\dagger)$$

Надо построить подпоследовательность x_{n_k} сходящуюся к l, т. е.

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n_k \ |$$
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \ | \ \forall k \geq n_0 \quad l - \varepsilon < x_{n_k} < l + \varepsilon$$

Первый член x_{n_1} построим следующим образом: выберем $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1/2$, по ε_1 из $(*)$ получим m_0 такое, что

$$l - 1/2 < l_{m_0} < l + 1/2.$$

Полагая $m = m_0$ в $(\dagger)$ по ε_2 получим k_0 такое, что

$$\forall k \geq k_0 \quad l_m - 1/2 < x_{n_k^m} < l_m + 1/2.$$

Наконец положим $n_1 = n_{k_0}^m$. Тогда

$$l - 1 < x_{n_1} < l + 1.$$

Второй член x_{n_1} строим так: выберем $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1/4$, по ε_1 из $(*)$ получим m_0 такое, что

$$l - 1/4 < l_{m_0} < l + 1/4.$$

Полагая $m = m_0$ в $(\dagger)$ по ε_2 получим k_0 такое, что

$$\forall k \geq k_0 \quad l_m - 1/4 < x_{n_k^m} < l_m + 1/4.$$

Наконец положим $n_2 = \max\{n_1 + 1, n_{k_0}^m\}$. При этом $n_1 > n_2$ и

$$l - 1/2 < x_{n_2} < l + 1/2.$$

Продолжая, мы получаем подпоследовательность x_{n_k}, которая удовлетворяет неравенствам

$$l - \frac{1}{k} < x_{n_k} < l + \frac{1}{k}$$

Теорема 12 $\rightarrow$ и тем самым сходится к l по теореме о зажатой последовательности.

Шаг 2 (случай $l = \pm\infty$). Рассмотрим случай $l = +\infty$. В этом случае последовательность x_n неограничена сверху. Действительно, если бы она была ограничена числом $c > 0$, то все ее подпоследовательности $x_{n_k^m}$, сходящиеся к l_m, были бы ограничены тем же числом c. По теореме о пределе и неравенстве $l_m \leq c$ и снова переходя к пределу в неравенстве, получаем $l \leq c$, что противоречит $l = +\infty$. 9 лекция

Теорема 11 $\rightarrow$

Итак, x_n неограничена, а тогда, как мы знаем, (см. доказательство теоремы 20) из нее можно выбрать подпоследовательность стремящуюся к $+\infty$. **Теорема доказана.**

Теорема
о наибольшем и наименьшем частичных пределах
$\Downarrow$
Определение ??

> Среди частичных пределов последовательности можно выбрать наибольший и наименьший (в $\overline{\mathbb{R}}$).

Теорема 5 →
Теорема 6 →
Теорема 12 →

Доказательство. Пусть M — множество частичных пределов последовательности x_n. По теореме о точных границах в $\overline{\mathbb{R}}$ множество M имеет $\sup M$ и $\inf M$ (в $\overline{\mathbb{R}}$). Покажем, что $\sup M \in M$. Тогда он будет наибольшим элементом в M. Построим последовательность $l_m \in M$, стремящуюся к $\sup M$.

Рассмотрим сначала случай $\sup M \in \mathbb{R}$. По критерию точной верхней границы имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in M \ \mid \ \sup M - \varepsilon < a$$

Будем полагать $\varepsilon = 1/m$ и полученные a брать в качестве l_m. Тогда

$$\sup M - 1/m < l_m \leq \sup M,$$

и по теореме о зажатой последовательности $l_m \to l$.

Если $\sup M = +\infty$, то это означает, что M неограничено сверху, и по определению можно найти последовательность $l_m \in M$, стремящуюся к $+\infty$.

Тот факт, что $\inf M \in M$ доказывается аналогично. **Теорема доказана.**

Определение
верхнего и нижнего пределов
⇓

Пусть x_n — последовательность. Наибольший и наименьший из частичных пределов x_n называются *верхним* и *нижним пределом* x_n и обозначаются соответственно $\overline{\lim} x_n$ и $\underline{\lim} x_n$.

Далее рассмотрим конструктивный подход к определению верхнего и нижнего пределов.

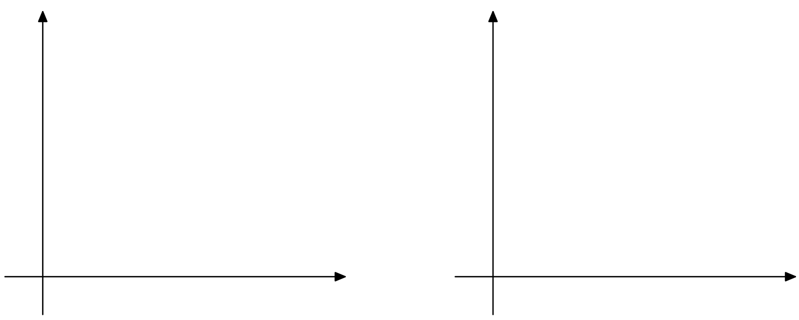
Определение
последовательностей верхнего и нижнего пределов
⇓

Пусть x_n — последовательность. Последовательности

$$u_n = \sup_{m \geq n} x_m = \sup\{x_m \mid m \geq n\},$$
$$l_n = \inf_{m \geq n} x_m = \inf\{x_m \mid m \geq n\}$$

называются соответственно *последовательностями верхнего* и *нижнего пределов.*

В следующей теореме будет доказано, что тоследовательности u_n и l_n имеют пределы, которые обозначаются соответственно через $\overline{\lim} x_n$ и $\underline{\lim} x_n$ и называются *верхним* и *нижним пределами* последовательности x_n.



(a) (b)

Комментарий. Если последовательность x_n неограничена сверху все члены последовательности u_n равны $+\infty$. В этом случае будем считать, что последовательность u_n имеет предел равный $+\infty$.

Аналогично, если последовательность x_n неограничена снизу все члены последовательности l_n равны $-\infty$ и можно считать, что $l_m \to -\infty$.

Установим свойства только что определенных последовательностей на примере u_n. Для l_n все аналогично.

Теорема 21
о верхнем пределе
$\Downarrow$
??

Пусть x_n — ограниченная сверху последовательность. Тогда

(1) u_n невозрастающая и имеет предел $u = \lim u_n$;
(2) u — частичный предел x_n;
(3) u — наибольший из частичных пределов x_n;

Доказательство.

Шаг 1 (монотонность u_n). Последовательность u_n невозрастающая по определению. Действительно,

$$\{x_k \mid k \geq n+1\} \subset \{x_k \mid k \geq n\} \quad \longrightarrow \quad \sup_{k \geq n+1} x_k \leq \sup_{k \geq n} x_k.$$

Теорема 16 $\to$ По теореме Вейерштрасса u_n, будучи монотонной, имеет предел $u = \lim u_n$. Причем $u > -\infty$ тогда и только тогда, когда u_n ограничена снизу.

Теорема 6 $\to$ **Шаг 2 (u — частичный предел x_n, случай $u \in \mathbb{R}$).** Из того, что $u_n \to u$ и $u_n = \sup_{m \geq n} x_m$ по критерию точной верхней границы ИМЕЕМ

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \mid \ \forall n \geq n_0 \quad u - \varepsilon_1 < u_n < u + \varepsilon_1 \qquad (*)$$
$$\forall \varepsilon_2 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \geq n \quad u_n - \varepsilon_2 < x_m \leq u_n \qquad (\dagger)$$

НАДО построить подпоследовательность x_{n_k} сходящуюся к u, т. е.

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n_k \ \mid$$
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_0 \in \mathbb{N} \ \mid \ \forall k \geq k_0 \quad u - \varepsilon < x_{n_k} < u + \varepsilon.$$

Построим x_{n_1} следующим образом. Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1/2$. По ε_1 из $(*)$ найдем n_0 такое, что

$$u - 1/2 < u_{n_0} < u + 1/2.$$

Далее, полагая $n = n_0$ в $(\dagger)$, по ε_2 получим номер $m \geq n_0$, который и возьмем в качестве n_1. При этом

$$u - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = u - 1 < x_{n_1} < u + 1/2 = u + \varepsilon_1.$$

Второй член x_{n_2} строится аналогично. Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1/4$. По ε_1 из $(*)$ найдем n_0 такое, что

$$\forall n \geq n_0 \quad u - 1/4 < u_n < u + 1/4.$$

Далее, полагая $n = \max\{n_0, n_1 + 1\}$ в (†) по ε_2 получим номер $m \geq n$, который и возьмем в качестве n_2. При этом

$$u - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = u - 1/2 < x_{n_2} < u + 1/4 = u + \varepsilon_1.$$

Полагая далее $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{1}{2k}$, мы построим подпоследовательность x_{n_k}, удовлетворяющую неравенствам

$$u - 1/k < x_{n_k} < u + 1/2k,$$

Теорема 12 → которая по теореме о зажатой последовательности сходится к u.

Шаг 3 (u — частичный предел x_n, случай $u = -\infty$). В этом случае x_n неограничена снизу. Действительно, если бы

$$\exists c \in \mathbb{R} \ \mid \ \forall m \in \mathbb{N} \quad x_m \geq c,$$

то мы бы имели $u_n \geq c$ и по теореме о пределе и неравенстве $u \geq c$, что невозможно. Поскольку x_n неограничена снизу, из нее можно выбрать подпоследовательность стремящуюся к $-\infty$ (см. детали в доказательстве теоремы 20 ?расписать подробно). **?!**

Шаг 4 (u — наибольший, случай $u \in \mathbb{R}$). Пусть x_{n_k} — произвольная подпоследовательность имеющая предел. Покажем, что $\lim x_{n_k} \leq u$. Для этого воспользуемся приемом с добавлением ε, а именно сначала для произвольного $\varepsilon > 0$ получим неравенство $\lim x_{n_k} \leq u + \varepsilon$, а затем в силу произвольности ε сделаем заключение, что $\lim x_{n_k} \leq u$.

Итак, имеем

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \mid \ \forall n \geq n_0 \quad u - \varepsilon_1 < u_n < u + \varepsilon_1 \qquad (u_n \to u) \qquad (*) \\ &\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall m \geq n \quad x_m \leq u_n \qquad (u_n = \sup_{m \geq n} x_m) \end{aligned}$$

Надо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_0 \in \mathbb{N} \ \mid \ \forall k \geq k_0 \quad x_{n_k} < u + \varepsilon.$$

Выбор k_0 по ε сделаем так:

$$\varepsilon \longrightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon \xrightarrow{(*)} n_0 \longrightarrow k_0 = n_0.$$

При таком выборе, привлекая (†) и вспоминая, что $n_k \geq k$ (см. доказательство
Теорема 18 → теоремы 18), заключаем, что

$$\forall k \geq k_0 = n_0 \quad x_{n_k} \leq u_k \leq u_{n_0} < u + \varepsilon$$

Теорема 11 → Переходя к пределу в неравенстве, получаем $\lim x_{n_k} \leq u + \varepsilon$.

Наконец $\lim x_{n_k} \leq u$ получается из предыдущего методом от противного в силу произвольности $\varepsilon > 0$.

Шаг 5 (u — наибольший, случай $u = -\infty$). Самостоятельно. **Теорема доказана.**

В заключение пункта получим еще одну теорему, которая пополнит наш арсенал средств для доказательства существования предела.

Теорема 22
критерий существования предела в терминах $\overline{\lim} x_n$ и $\underline{\lim} x_n$
$\Downarrow$
??

$$\text{Последовательность } x_n \text{ имеет предел} \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n.$$

Доказательство.

Необходимость. Немедленно следует из того, что все подпоследовательности имеющей предел последовательности стремятся к тому же пределу.

Теорема 18 →

Достаточность. Из определения последовательностей верхнего и нижнего пределов имеем неравенства

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad l_n \le x_n \le u_n.$$

Поскольку l_n и u_n по условию стремятся к одному и тому же пределу $\overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$, по теореме о зажатой последовательности x_nстремится к тому же пределу. **Теорема доказана.**

Теорема 12 →

§ 4. Предел функции

4.1. Определение предела функции.

Определение
предельной точки
⇓

Точка $a \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой* (или *точкой сгущения*) множества $X \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in X \ \mid \ 0 < |x - a| < \varepsilon.$$

Точка $a \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой* (или *точкой сгущения*) *слева* множества $X \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in X \ \mid \ a - \varepsilon < x < a.$$

Точка $a \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой* (или *точкой сгущения*) *справа* множества $X \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in X \ \mid \ a < x < a - \varepsilon.$$

Бесконечно удаленная точка $+\infty$ называется *предельной точкой* множества $X \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall E > 0 \quad \exists x \in X \ \mid \ x > E.$$

Бесконечно удаленная точка $-\infty$ называется *предельной точкой* множества $X \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall E > 0 \quad \exists x \in X \ \mid \ x < -E.$$

Комментарии.

1. В словесном выражении тот факт, что a — предельная точка X значит, что X содержит точки сколь угодно близкие к a, но при этом отличные от нее самой.

2. Предельная точка может принадлежать множеству, а может и не принадлежать.

3. Словосочетание «точка сгущения» можно использовать только в случае конечной точки, в отличие от универсального «предельная точка». Используя термин «точка сгущения», мы будем подчеркивать, что речь идет исключительно о случае конечной предельной точки.

Определение
конечного предела
в точке сгущения
⇓

Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, a — точка сгущения X. Число $l \in \mathbb{R}$ называют *предело́м $f(x)$ в точке a* и пишут $l = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ \mid \ \forall x \in X \quad 0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - l| < \varepsilon.$$

При этом также говорят, что $f(x)$ *стремится к l при $x \to a$* и пишут $f(x) \to l$, $x \to a$.

Определение
односторонних
пределов функции
$\Downarrow$

Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, a — точка сгущения X слева. Число l называют *пределом* $f(x)$ *в точке* a *слева* и пишут $l = \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = f(a-0)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ \mid \ \forall x \in X \quad a < x < a+\delta \to |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, a — точка сгущения X справа. Число l называют *пределом* $f(x)$ *в точке* a *справа* и пишут $l = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a+0)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ \mid \ \forall x \in X \quad a-\delta < x < a \to |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Определение
конечного предела
на бесконечности
$\Downarrow$

Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, $\pm\infty$ — предельная точка X. Число l называют *пределом* $f(x)$ *при* $x \to \pm\infty$ и пишут $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = l$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta > 0 \ \mid \ \forall x \in X \quad \pm x > \Delta \to |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Комментарии. Пределы на бесконечности можно рассматривать как односторонние пределы функций.

Определение
бесконечного предела
в точке сгущения
$\Downarrow$

Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, a — точка сгущения X. Говорят, что $f(x)$ *стремится к* $\pm\infty$ *при* $x \to a$ и пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, если

$$\forall E > 0 \quad \exists \delta > 0 \ \mid \ \forall x \in X \quad 0 < |x-a| < \delta \to \pm f(x) > E.$$

Определение
бесконечного предела
на бесконечности
$\Downarrow$

Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, $\pm\infty$ — предельная точка X. Говорят, что $f(x)$ *стремится к* $\pm\infty$ *при* $x \to \pm\infty$ и пишут $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, если

$$\forall E > 0 \quad \exists \Delta > 0 \ \mid \ \forall x \in X \quad \pm x > \Delta \to \pm f(x) > E.$$

Определение
окрестности и
проколотой окрестности
⇓

Окрестность и *проколотая окрестность* точки $a \in \overline{\mathbb{R}}$ определяются как произвольные множества вида, указанного в следующей таблице, где $\delta > 0$ и $\Delta > 0$ — произвольные числа:

	$a \in \mathbb{R}$	$a = +\infty$	$a = -\infty$
Окрестность	$(a-\delta, a+\delta)$	$(\Delta, +\infty]$	$[-\infty, -\Delta)$
Проколотая окрестность	$(a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$	$(\Delta, +\infty)$	$(-\infty, -\Delta)$

Определение
предельной точки
на языке окрестностей
⇓

Точка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ — предельная точка X, если

$$\forall \text{ прок. окр. } \mathring{U} \text{ точки } a \quad \mathring{U} \cap X \neq \emptyset.$$

Определение
предела функции на языке
окрестностей
⇓

Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ — предельная точка X. Говорят, что $f(x)$ *стремится к* $l \in \overline{\mathbb{R}}$ *при* $x \in a$, если

$$\forall \text{ окр. } V \text{ точки } l \quad \exists \text{ прок. окр. } \mathring{U} \text{ точки } a \ \mid \ f(\mathring{U} \cap X) \subset V.$$

Эквивалентность. определений на языке ε–δ и языке окрестностей в каждом конкретном случае, легко установить записав определения друг под другом...

4.2. Секвенциальный подход. Оказывается, что понятие предела функции можно свести эквивалентным образом к понятию предела последовательности. Такой подход к определению предела называют *секвенциальным* (от англ. sequential — связанный с последовательностью) и связывают с именем Э. Гейне. Определение предела на языке ε–δ, приведенное выше, называют определением предела по Коши. Связав предел функции с пределом последовательности, мы легко перенесем многие результаты полученные для последовательности на случай функций.

Теорема 23
о предельной точке
в секвенциальном подходе
⇓

$$\text{Точка } a \in \overline{\mathbb{R}} \text{ — предельная точка множества } X \subset \mathbb{R}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\text{существует такая последовательность } x_n, \text{ что } x_n \in X,\ x_n \neq a,\ x_n \to a.$$

Доказательство. Мы докажем теорему в случае конечной предельной точки. Случай $a = \pm\infty$ рассматривается аналогично.

Необходимость. Дано

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists x \in X \;\mid\; 0 < |x - a| < \varepsilon_1. \tag{$*$}$$

Надо построить такую последовательность x_n, что

$$x_n \in X, \quad x_n \neq a, \quad x_n \to a.$$

Полагая в $(*)$ $\varepsilon = 1/n$, берем полученный x в качестве x_n. Полученная последовательность x_n удовлетворяет неравенствам

$$0 < |x_n - a| < 1/n.$$

Теорема 12 →

Первое неравенство означает, что $x_n \neq a$, а второе вместе с теоремой о зажатой последовательности то, что $x_n \to a$.

Достаточность. Дано

$$\begin{aligned}&\text{существует такая последовательность } x_n, \text{ что}\\ &x_n \in X, \quad x_n \neq a\\ &\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\mid\; \forall n \geq n_0 \quad |x_n - a| < \varepsilon_1.\end{aligned} \tag{$*$}$$

Надо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in X \;\mid\; 0 < |x - a| < \varepsilon.$$

Полагая в $(*)$ $\varepsilon_1 = \varepsilon$, получаем номер n_0. Элемент x_{n_0} — искомый. **Теорема доказана.**

Теорема 24
об эквивалентности
определений предела
по Гейне и Коши
⇓
Теоремы 26, 29, 30, 38, 40

> Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ — функция, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ — предельная точка X. Тогда
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = l \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned}&\text{для любой последовательности } x_n\\ &\text{такой, что } x_n \in X,\ x_n \neq a,\ x_n \to a,\\ &\text{верно } f(x_n) \to l.\end{aligned}$$

Доказательство. Мы докажем теорему в случае конечной предельной точки a и конечного предела l. Остальные случаи рассматривается аналогично.

Необходимость. Дано

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists \delta > 0 \;\mid\; \forall x \in X \quad 0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - l| < \varepsilon_1 \tag{$*$}$$

$$\begin{aligned}&\text{последовательность } x_n \text{ такая, что}\\ &x_n \in X, \quad x_n \neq a,\\ &\forall \varepsilon_2 > 0 \quad \exists n_2 \in \mathbb{N} \;\mid\; \forall n \geq n_2 \quad |x_n - a| < \varepsilon_2\end{aligned} \tag{$\dagger$}$$

Надо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\mid\; \forall n \geq n_0 \quad |f(x_n) - l| < \varepsilon.$$

Найдем n_0 по ε следующим образом. Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon$ в $(*)$ и полученное δ возьмем в качестве ε_2 в $(\dagger)$. Полученное n_2 и есть искомое n_0.

Достаточность. Воспользуемся методом от противного. Предположим, что $f(x)$ не стремится к l и построим такую последовательность x_n, что $x_n \in X$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$, но при этом $f(x_n) \not\to l$. Дано

$$\begin{aligned}&f(x) \text{ не стремится к } l \text{ при } x \to a, \text{ т. е.}\\ &\exists \varepsilon_1 > 0 \ \mid \ \forall \delta_1 > 0 \quad \exists x \in X \ \mid \ 0 < |x-a| < \delta_1 \text{ и } |f(x) - l| \geq \varepsilon_1. \qquad (*)\end{aligned}$$

Надо

$$\begin{aligned}&\text{построить последовательность } x_n \text{ такую, что}\\ &x_n \in X, \quad x_n \neq a, \quad x_n \to a\\ &\text{и } f(x_n) \text{ не стремится к } l, \text{ т. е.}\\ &\exists \varepsilon > 0 \ \mid \ \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq n_0 \ \mid \ |f(x_n) - l| \geq \varepsilon. \qquad (\dagger)\end{aligned}$$

Прежде всего, поглядев на неравенства в $(*)$ и $(\dagger)$ положим $\varepsilon_1 = \varepsilon$ (ε нам дано, а ε_1 нужно было найти). Далее строим x_n следующим образом. Глядя на первое неравенство в $(*)$, полагаем $\delta_1 = 1/n$ и полученный x берем в качестве x_n. Тогда

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < |x_n - a| < 1/n \quad \text{и} \quad |f(x_n) - l| \geq \varepsilon.$$

Теорема 12 →

Первое неравенство означает, что $x_n \neq a$, второе вместе с теоремой о зажатой последовательности дает $x_n \to a$, а третье гарантирует, что $f(x_n)$ не может сходиться к l. Построенная последовательность x_n приводит нас к требуемому противоречию. **Теорема доказана.**

4.3. Свойства предела.

Теорема 25
о пределе функции
и неравенстве
⇓

> Пусть функции $f, g : X \to \mathbb{R}$ имеют пределы в точке $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
>
> Если в любой проколотой окрестности a есть точки $x \in X$, в которых $f(x) \leq g(x)$, то
> $$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x).$$

Доказательство. Докажем методом от противного, пользуясь (для разнообразия) языком окрестностей. Предположим, что

$$\lim_{x\to a} f(x) > \lim_{x\to a} g(x).$$

Тогда найдется такое число $c \in \mathbb{R}$, что

$$\lim_{x\to a} f(x) > c > \lim_{x\to a} g(x)$$

Тогда по определению предела

$$\exists \text{ прок. окр. } \overset{\circ}{V} \ \mid \ \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap X \quad f(x) > c \quad \text{и} \quad c > g(x).$$

С другой стороны, по условию в любой такой окрестности найдется точка, в которой выполняется обратное неравенство, противоречие. **Теорема доказана.**

Теорема 26
о пределе функции
и алгебраических операциях
⇓
Теорема 39

Пусть функции $f, g : X \to \mathbb{R}$ имеют конечные пределы в точке a. Тогда

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) \pm g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

(2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

(3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x)/\lim\limits_{x\to a} g(x)$ (при дополнительном условии $g(x) \neq 0$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$).

Доказательство Сведем все к случаю последовательностей. возьмем произвольную последовательность x_n такую, что $x_n \in X$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$. По теореме об эквивалентности определений предела по Гейне и Коши имеем

Теорема 24 →

$$\lim f(x_n) = \lim_{x\to a} f(x), \quad \lim g(x_n) = \lim_{x\to a} g(x).$$

Теорема 15 →

Далее в силу известных свойств предела последовательности

$$\lim f(x_n) + g(x_n) = \lim f(x_n) + \lim g(x_n),$$

откуда в силу произвольности x_n опять по теореме 24 заключаем, что

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x).$$

Правила для произведения и отношения получаются аналогично. **Теорема доказана.**

Теорема 27
о пределе композиции
⇓
Теорема 39, 42

Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$ — две функции такие, что $f(X) \subset Y$, т. е. определена композиция $g \circ f : X \to \mathbb{R}$, а $a \in \overline{\mathbb{R}}$ — предельная точка X. Если

(1) f имеет предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

(2) $\forall x \in X \quad x \neq a \to f(x) \neq b$;

(3) g имеет предел $\lim\limits_{y\to b} g(y) = l$,

то $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = l$.

Доказательство. Мы рассмотрим случай $a, b, l \in \mathbb{R}$. Остальные — аналогично.

Сначала докажем, что b — предельная точка Y. Дано

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists x \in X \ \mid\ 0 < |x - a| < \varepsilon_1, \tag{$*$}$$

$$\forall x \in X \quad x \neq a \to f(x) \neq b, \tag{$\dagger$}$$

$$\forall \varepsilon_2 > 0 \quad \exists \delta_2 > 0 \ \mid\ \forall x \in X \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \to |f(x) - b| < \varepsilon_2. \tag{$\ddagger$}$$

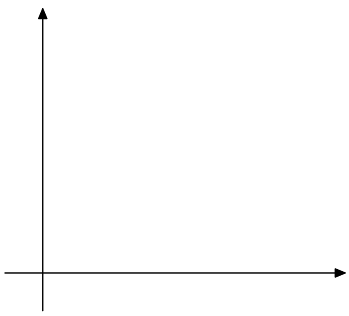
Надо
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists y \in Y \;\mid\; 0 < |y-b| < \varepsilon. \tag{§}$$
Выбирая в (‡) $\varepsilon_2 = \varepsilon$, мы получаем δ_2. Далее полагая в $(*)$ $\varepsilon_1 = \delta_2$, находим $x \in X$. Элемент $y = f(x)$ искомый. Отметим, что неравенство $0 < |y-b|$ в (§) вытекает из (†)

Теперь докажем, что $\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = l$. Дано
$$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists \delta_1 > 0 \;\mid\; \forall x \in X \quad 0 < |x-a| < \delta_1 \to |f(x)-b| < \varepsilon_1, \tag{$*$}$$
$$\forall x \in X \quad x \neq a \to f(x) \neq b, \tag{†}$$
$$\forall \varepsilon_2 > 0 \quad \exists \delta_2 > 0 \;\mid\; \forall x \in X \quad 0 < |y-b| < \delta_2 \to |g(y)-l| < \varepsilon_2. \tag{‡}$$

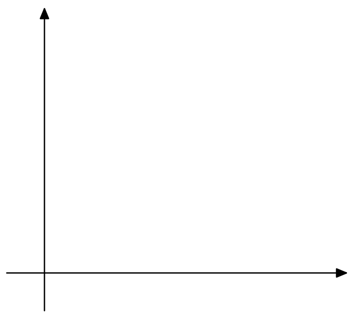
Надо
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \;\mid\; \forall x \in X \quad 0 < |x-a| < \delta \to |g(f(x))-l| < \varepsilon. \tag{§}$$

Выбор δ по ε происходит в следующей последовательности. Сравнивая неравенства в (§) и (‡), полагаем $\varepsilon_2 = \varepsilon$ и получаем δ_2. Далее выбирая $\varepsilon_1 = \delta_2$, получаем δ_1. Это и есть искомое δ. Действительно, при таком выборе
$$0 < |x-a| < \delta \to 0 < |f(x)-b| < \varepsilon_1 = \delta_2 \to |g(f(x))-l| < \varepsilon$$
Заметим, что дополнительное неравенство $0 < |f(x)-b|$ получается из (†). **Теорема доказана.**

Замечание. Условие $f(x) \neq b$ существенно.



(a)



(b)

4.4. Теоремы существования.

Определение
монотонной функции
$\Downarrow$

Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется

неубывающей, если $\quad \forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$,
невозрастающей, если $\quad \forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$,
возрастающей, если $\quad \forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$,
убывающей, если $\quad \forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Неубывающие и невозрастающие функции называются *монотонными*, а возрастающие и убывающие — *строго монотонными*.

Теорема 28
о пределе
монотонной функции
⇓
??

> Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ монотонна, а $a \in \overline{\mathbb{R}}$ — предельная точка X справа (слева). Тогда f имеет в точке a односторонний предел $f(a+0)$ $(f(a-0x))$.

Доказательство. Разберем подробно случай $a \in \mathbb{R}$, предполагая, что a — предельная точка слева, а функция $f(x)$ неубывающая.

Как в доказательстве теоремы Вейерштрасса, возьмем супремум

$$l = \sup_{x \in X, x < a} f(x)$$

и докажем, что он и есть предел $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$. Предположим для определенности, что $l < +\infty$. В случае $l = +\infty$ нужно использовать немного другие неравенства. Итак, в силу критерия точной точной верхней границы имеем

Теорема 6 →

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists x_1 \in X \cap (-\infty, a) \ \mid \ l - \varepsilon_1 < f(x_1) \le l, \tag{$*$}$$

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2) \tag{$\dagger$}$$

Надо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ \mid \ \forall x \in X \quad a - \delta < x < a \to l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon.$$

Выберем δ по ε следующим образом. Полагая $\varepsilon_1 = \varepsilon$ в $(*)$ получим x_1. После чего возьмем $\delta = a - x_1$. При таком выборе имеем

$$\forall x \in X \quad x_1 = a - \delta < x < a \xrightarrow{(\dagger)} l - \varepsilon < f(x_1) < f(x) \le l < l + \varepsilon;$$

так что δ — искомое. **Теорема доказана.**

Замечание. Односторонние пределы у монотонной функции всегда существуют, но могут не совпадать! Т.е. предела может не быть.

Теорема 29
критерий Коши
для функций
⇓
??

> Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, а $a \in \overline{\mathbb{R}}$ — предельная точка X.
>
> $f(x)$ имеет <u>конечный</u> предел в a $\iff$ выполнено условие Коши:
>
> $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ \mid \ \forall x_1, x_2 \in X \quad \begin{Bmatrix} 0 < |x_1 - a| < \delta \\ 0 < |x_2 - a| < \delta \end{Bmatrix} \to |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$
>
> (для $a \in \mathbb{R}$),
>
> $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta > 0 \ \mid \ \forall x_1, x_2 \in X \quad \begin{Bmatrix} \pm x_1 > \Delta \\ \pm x_2 > \Delta \end{Bmatrix} \to |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$
>
> (для $a = \pm\infty$).

Доказательство. Докажем в случае конечной точки a.

Необходимость. Дано

функция $f(x)$ имеет конечный предел $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, т. е.

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists \delta_1 > 0 \ \mid \ \forall x \in X \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \to |f(x) - l| < \varepsilon_1$$

Надо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \;\mid\; \forall x_1, x_2 \in X \quad \left\{\begin{matrix} 0 < |x_1 - a| < \delta \\ 0 < |x_2 - a| < \delta \end{matrix}\right\} \to |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Как и в доказательстве критерия Коши для последовательностей, берем $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ и получив δ_1 полагаем $\delta = \delta_1$. При таком выборе

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad \left\{\begin{matrix} 0 < |x_1 - a| < \delta \\ 0 < |x_2 - a| < \delta \end{matrix}\right\} \to$$
$$\to |f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - l| + |l - f(x_2)| < 2\varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Достаточность. Сведем достаточность к достаточности в критерии Коши для последовательностей, пользуясь эквивалентностью определений предела по Гейне и Коши. Пусть x_n — произвольная последовательность такая, что

$$x_n \in X, \quad x_n \neq a, \quad x_n \to a.$$

Покажем, что последовательность $f(x_n)$ фундаментальна. Дано

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} \;\mid\; \forall n \geq n_1 \quad 0 < |x_n - a| < \varepsilon_1 \tag{$*$}$$

$$\forall \varepsilon_2 > 0 \quad \exists \delta_2 > 0 \;\mid\; \forall x_1, x_2 \in X \quad \left\{\begin{matrix} 0 < |x_1 - a| < \delta_2 \\ 0 < |x_2 - a| < \delta_2 \end{matrix}\right\} \to |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon_2. \tag{$\dagger$}$$

Надо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq n_0 \quad |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

Глядя на неравенства, будем действовать следующим образом

$$\varepsilon \;\longrightarrow\; \varepsilon_2 = \varepsilon \;\xrightarrow{(\dagger)}\; \delta_2 \;\longrightarrow\; \varepsilon_1 = \delta_2 \;\xrightarrow{(*)}\; n_1 \;\longrightarrow\; n_0 = n_1.$$

Тем самым мы доказали, что $f(x_n)$ фундаментальна и, значит, по критерию Коши для последовательностей имеет конечный предел $\lim f(x_n) = l$. Теорема 17 →

Докажем, что этот предел l не зависит от выбора последовательности x_n методом от противного. Предположим, что две последовательности x'_n и x''_n приводят к разным пределам $\lim f(x'_n) = l'$ и $\lim f(x''_n) = l''$. Составим из x'_n и x''_n новую последовательность x_n следующим образом:

$$x'_1,\ x''_1,\ x'_2,\ x''_2, \ldots .$$

Полученная последовательность, очевидно, обладает свойствами

$$x_n \in X, \quad x_n \neq a, \quad x_n \to a,$$

Теорема 17 → и значит, $f(x_n)$ как и выше фундаментальна. По критерию Коши для последовательностей она имеет конечный предел. С другой стороны она имеет два различных частичных предела l' и l'', что невозможно по теореме 18. Теорема 18 →

Итак, для любой x_n такой, что

$$x_n \in X, \quad x_n \neq a, \quad x_n \to a,$$

Теорема 24 → последовательность $f(x_n)$ сходится к l. В этом случае теорема 24 гарантирует, что $\lim_{x \to a} f(x) = l$. **Теорема доказана.**

Отрицание условия Коши.

$$\exists \varepsilon > 0 \;\mid\; \forall \delta > 0 \quad \exists x_1, x_2 \in X \;\mid\; \left\{\begin{matrix} 0 < |x_1 - a| < \delta \\ 0 < |x_2 - a| < \delta \end{matrix}\right\} \quad \text{и} \quad |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon.$$

§ 5. Непрерывные функции

5.1. Определение непрерывной функции.

Многие функции, с которыми приходится иметь дело в математике, физике, и т. д. меняются, переходя от одного своего значения к другому последовательно, а не скачкообразно. Выражаясь образно, если область определения такой функции — отрезок, то график можно нарисовать не отрывая карандаша от бумаги. Такие функции называются непрерывными и играют исключительно важную роль в анализе.

Определение
непрерывной функции
$\Downarrow$

Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной в точке* $a \in X$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \delta > 0 \ \mid \ \forall x \in X \quad |x-a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Говорят, что функция $f : X \to \mathbb{R}$ *непрерывна*, если она непрерывна в каждой точке своей области определения X.

Комментарии. 1. Для точки $a \in X$ возможны два случая: a — точка сгущения X, a не точка сгущения. В последнем случае говорят, что a — *изолированная точка* X. Если a — изолированная, то по определению предельной точки

$$\exists \delta > 0 \ \mid \ (a - \delta, a + \delta) \cap X = \{a\}.$$

Для этого δ посылка $|x - a| < \delta$ выполняется для одной единственной точки a, для которой, конечно, $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$.

В итоге, в изолированной точке любая функция всегда непрерывна.

2. Теперь пусть a — точка сгущения X. В этом случае можно говорить о пределе $f(x)$ в точке a и условие в определении непрерывности означает, что

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

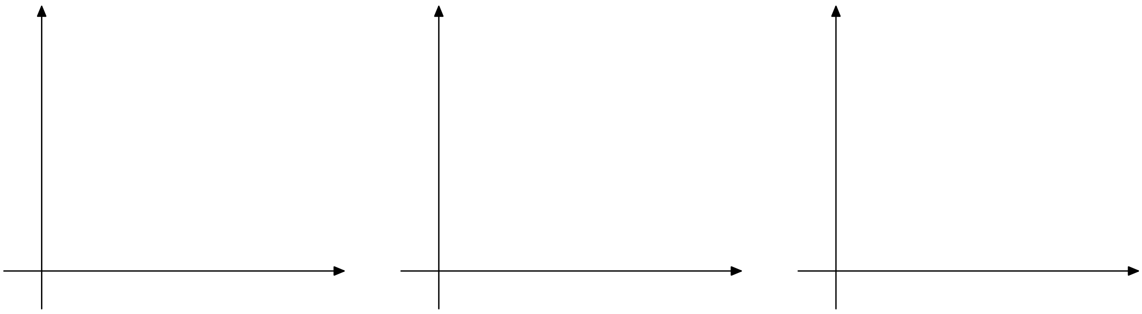
т. е. предел совпадает со значением.

3. Если a не принадлежит X, но является точкой сгущения X, формально говорить о непрерывности нельзя. Однако, можно считать, что $f(x)$ непрерывна в a, если $f(x)$ имеет конечный предел в a. Действительно, если доопределить $f(x)$ в точке a, полагая $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$, то полученная функция будет непрерывной в a.

4. Непрерывность в секвенциальном подходе.

Классификация точек разрыва. Если функция не непрерывна в точке a, говорят, что она *терпит разрыв* или просто *разрывна.* Разрыв в точке может произойти по одной из причин, перечисленных в следующей таблице. В зависимости от причины, разрывы делят на *устранимые*, когда поменяв значение функции можно превратить ее в непрерывную, и *неустранимые*, когда это невозможно.

Тип разрыва	$\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$	$f(a)$
Устранимый	существуют конечные совпадают друг с другом		не существует или существует, но не совпадает с пределом
Неустранимый 1 рода	существуют, конечные, но не совпадают		неважно
Неустранимый 2 рода	хотя бы один не существует или бесконечен		неважно



(a) (b) (c)

Иногда, разрыв случается в отдельных точке, при этом во всех близких точках функция непрерывна. Может произойти и такое, что функция имеет разрывы во всех точках области определения.

Примеры. Функции Римана и Дирихле

Теорема 30
о непрерывности
суммы и т. д.
⇓
Теорема 39

> (1) Если $f, g : X \to \mathbb{R}$ непрерывны, то $f \pm g$, fg, f/g тоже непрерывны (последнее при условии, что $g(x) \neq 0$ на X)
>
> (2) Если $f : X \to Y$ и $g : Y \to \mathbb{R}$ непрерывны, то $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ тоже непрерывна.

Доказательство.

Шаг 1 (сумма, произведение, отношение). Пусть a — произвольная точка X. Если $a \in X$ — изолированная точка, то доказывать нечего. Если же a — предельная точка X, то утвердение немедленно следует из теоремы 26.

Шаг 2 (композиция). Если $a \in X$ — изолированная точка, то доказывать нечего. Пусть a — произвольная предельная точка X и x_n — произвольная последовательность, такая, что $x_n \to a$. Непрерывность $f(x)$ означает, что $f(x_n) \to f(a)$. По непрерывности g $g(f(x_n)) \to g(f(a))$, что означает непрерывность $g \circ f$. **Теорема доказана.**

Теорема 24 →

Теорема 31
о непрерывности монотонной функции
⇓
Теорема 38

> Если функция $f : X \to \mathbb{R}$ монотонна и множество ее значений $\operatorname{im} f$ — промежуток, то f непрерывна.

Доказательство Не теряя общности, предположим, что $f(x)$ неубывающая. Пусть a — точка сгущения. Это орначает, что a — точка сгущения слева или точка сгущения справа, или же и справа и слева. Рассмотрим для определенности последний случай. Остальные рассматриваются аналогично. Кроме того a может принадлежать X или не принадлежать. Предположим, что a принадлежит X.

теорема 28 →

По теореме 28 существуют пределы $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$. Эти пределы и значение $f(a)$ связаны неравенствами

$$\lim_{x\to a-0} f(x) \le f(a) \le \lim_{x\to a+0} f(x).$$

Действительно,

$$\forall x < a \quad f(x) \le f(a),$$

Теорема 25 →

откуда по теореме 25 следует левое неравенство. Правое доказыватеся аналогично.

Покажем, что на самом деле имеют место равенства, методом от противного. Предположим, что одно из неравенств строгое, например, левое. Тогда любая точка y, $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) < y < f(a)$ не принадлежит множеству значений f, так как

Теорема 25 →

$$\begin{aligned} &\forall x \ge a \quad f(x) \ge f(a), \\ &\forall x < a \quad f(x) \le \lim_{x\to a-0} f(x). \end{aligned}$$

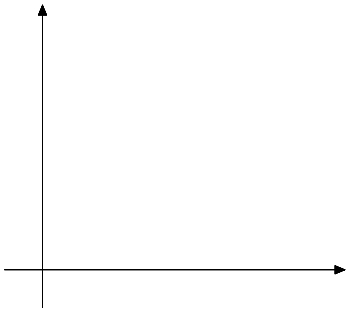
Получается, что $\operatorname{im} f$ невыпукло, а это противоречит тому, что $\operatorname{im} f$ промежуток. **Теорема доказана.**

5.2. Свойства непрерывных функций.

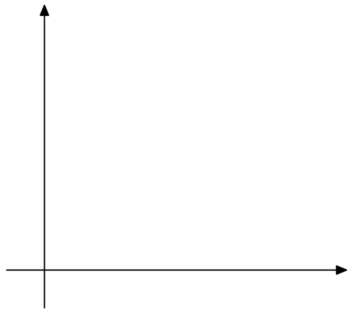
Непрерывные функции обладает целым рядом полезных свойств, которые мы постоянно будем использовать.

Теорема 32
Больцано — Коши
о промежуточных значениях
⇓

> Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция на промежутке, а
>
> $$y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2), \quad x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle, \quad x_1 < x_2,$$
>
> — два ее значения. Тогда
>
> $$\forall y \text{ между } y_1 \text{ и } y_2 \quad \exists x \in [x_1, x_2] \ \mid\ f(x) = y.$$
>
> Иными словами, непрерывная функция на промежутке принимает все свои промежуточные значения.



(a)



(b)

Доказательство Не теряя общности, предположим, что $y_1 \le y_2$, и пусть $y_1 \le y \le y_2$. Нам нужно найти точку $x \in [a,b]$ такую, что $y = f(x)$. Докажем теорему методом деления отрезка пополам. Построим последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$.

Пусть $[a_1, b_1] = [x_1, x_2]$ и $c = \frac{a_1+b_1}{2}$ — середина отрезка $[a_1, b_1]$. Если $f(c) \le y$, то $[a_2, b_2] = [c, b_1]$, а если $f(c) \ne y$, то $[a_2, b_2] = [a_1, c]$. Продолжая, мы получим вложенные отрезки $[a_n, b_n]$, концы которых в силу принципа вложенных отрезков и теоремы о зажатой последовательности (см. доказательство теоремы 17) сходятся к некоторой точке $x \in [a_1, b_1]$. По непрерывности f имеем $f(a_n) \to f(x)$ и $f(b_n) \to f(x)$ Кроме того, по построению

Теоремы 2, 12 →

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(a_n) \le y \le f(b_n),$$

Теорема 12 →

откуда снова по теореме о зажатой последовательности $f(x) = y$. **Теорема доказана.**

Замечания. Важно, что X связно. Пример.

Замечание. Способ решения уравнений $f(x) = 0$.

В качестве следствия получается следующая теорема, верная для функций, заданных на любом промежутке.

Теорема 33
о множестве значений непрерывной функции на промежутке

$\Downarrow$

> Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция на – промежутоке. Тогда множество значений f — промежуток.

Доказательство

Теорема 32 →

Шаг 1 (im f выпукло). Из предыдущей теоремы следует, что $\operatorname{im} f$ выпукло, т.е. вместе с любыми двумя точками $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$ содержит все точки между y_1 и y_2.

Шаг 2 (выпуклое множество в $\mathbb{R}$ — промежуток). Дано $I \subset \mathbb{R}$ выпуклое, т. е.

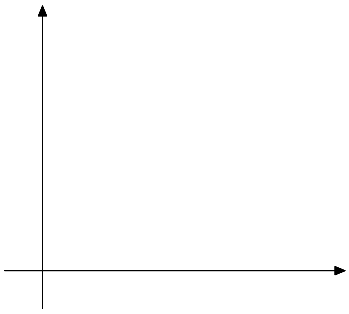
$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad \left\{ \begin{matrix} x, z \in I \\ x < y < z \end{matrix} \right\} \to y \in I$$

Надо I — промежуток, т. е.

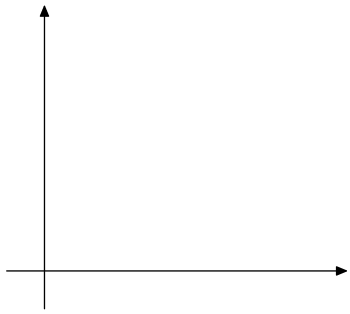
$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \;\mid\; \forall y \in \mathbb{R} \quad \alpha < y < \beta \to y \in I$$

Теорема 6 → Возьмем $\alpha = \inf I$ и $\beta = \sup I$ (они могут быть и бесконечными). Пользуясь критерием точной верхней границы в случае конечных точек и просто определением неограниченного множества в случае бесконечных, для $\alpha < y < \beta$ мы можем найти такие точки $x, z \in I$, что $\alpha < x < y < z < \beta$, откуда немедленно получается $y \in I$. **Теорема доказана.**

Замечание. Вид промежутка $\operatorname{im} f$ вообще говоря не связан с видом промежутка $\langle a, b \rangle$.



(a)



(b)

Теорема 34
Вейерштрасса
о наибольшем и
наименьшем значении
⇓

Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывная функция на отрезке. Тогда

$$\exists x_{\min}, x_{\max} \in [a,b] \ \mid\ \forall x \in [a,b] \quad f(x_{\min}) \le f(x) \le f(x_{\max}),$$

т. е. f принимает наибольшее и наименьшее значения.

В частности, f ограничена.

Доказательство Докажем, существование наибольшего значения. С наименьшим все аналогично. Пусть $u = \sup_{[a,b]} f(x)$ (возможно $u = +\infty$).

Теорема 6 → Если $u < +\infty$, то по критерию точной верхней границы ИМЕЕМ

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in [a,b] \ \mid\ u - \varepsilon < f(x) \le u. \qquad (*)$$

Если $u = +\infty$, то определению ограниченного множества ИМЕЕМ

$$\forall E > 0 \quad \exists x \in [a,b] \ \mid\ E < f(x). \qquad (\dagger)$$

НАДО построить последовательность x_n такую, что

$$x_n \in [a,b] \quad \text{и} \quad f(x_n) \to u.$$

Если $u < +\infty$, полагаем $\varepsilon = 1/n$ в $(*)$ и берем полученный x в качестве x_n. Если же $u = +\infty$, то полагаем $E = n$ в $(\dagger)$ и берем полученный x в качестве x_n.

Итак, x_n построена. Сама последовательность возможно никуда не сходится.
Теорема 19 → Однако, по теореме Больцано — Вейерштрасса из x_n можно выбрать сходящуюся подпоследовательность x_{n_k}. Положим $x_{\max} = \lim_k x_{n_k}$. По теореме о
Теорема 11 → пределе последовательности и неравенстве $x_{\max} \in [a,b]$. В силу непрерывности $f(x)$ и теоремы 18 соответственно получаем

$$f(x_{n_k}) \to f(x_{\max}), \quad f(x_{n_k}) \to u = \sup_{[a,b]} f(x),$$

откуда

$$f(x_{\max}) = \sup_{[a,b]} f(x).$$

Теорема доказана.

Замечание. В доказательстве используется то, что функция задана на замкнутом и ограниченном множестве. Связность неважна.

5.3. Равномерная непрерывность.

Определение
равномерно непрерывной функции
$\Downarrow$

Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется *равномерно непрерывной* (*на* X), если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ \mid \ \forall x_1, x_2 \in X \quad |x_1 - x_2| < \delta \to |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Сравнение с непрерывностью.

Замечание. равномерная непрерывность — глобальное свойство. Важно множество.

Отрицание равномерной непрерывности. Функция не равномерно непрерывна на мнжестве X тогда и только тогда, когда

$$\exists \varepsilon > 0 \ \mid \ \forall \delta > 0 \exists x_1, x_2 \in X \ \mid \ |x_1 - x_2| < \delta \quad \text{и} \quad |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon.$$

Примеры. Для доказательства равномерной непрерывности мы должны по $\varepsilon > 0$ находить $\delta > 0$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ \mid \ \forall x_1, x_2 \in X \quad |x_1 - x_2| < \delta \to |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

А для доказательства ее отсутствия — предоставить $\varepsilon > 0$ и по произвольному $\delta > 0$ найти пару x_1, x_2:

$$\exists \varepsilon > 0 \ \mid \ \forall \delta > 0 \quad \exists x_1, x_2 \in X \ \mid \ |x_1 - x_2| < \delta \quad \text{и} \quad |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon.$$

Очевидно, что строгое неравенство $|x_1 - x_2| < \delta$ можно заменить на нестрогое.

1. Функция $f(x) = x$ на $\mathbb{R}$ равномерно непрерывна. Очевидно, нужно взять $\delta = \varepsilon$.

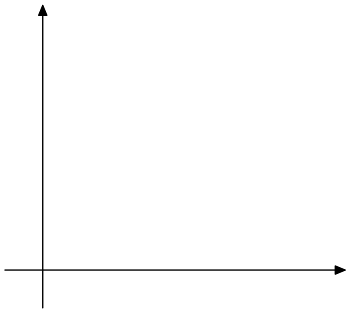
2. Функция $f(x) = x^2$ на $\mathbb{R}$ не равномерно непрерывна, хотя непрерывна в каждой точке $x \in \mathbb{R}$. Действительно, положим $\varepsilon = 1$, возьмем произвольное $\delta > 0$ и найдем пару x_1, x_2 такую, что

$$x_2 - x_1 = \delta \qquad x_2^2 - x_1^2 = \varepsilon = 1$$

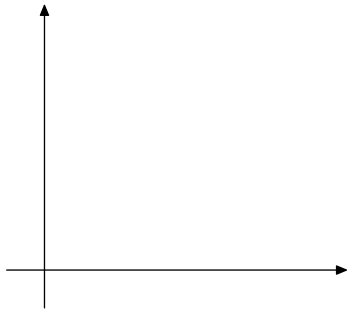
Решая систему, получаем

$$x_1 = \frac{1 - \delta^2}{2\delta}, \quad x_2 = \frac{1 + \delta^2}{2\delta}.$$

Заметим, что при $\delta \to 0$, обе точки x_1, x_2 стремятся к $+\infty$, и область определения $f(x)$ это позволяет. Ключевым моментом здесь является то, что область определения неограничена и отношение $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ можно сделать сколь угодно большим.



(a)



(b)

Теорема 35
Кантора о равномерной непрерывности
$\Downarrow$

> Если $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция на <u>отрезке</u>, то f равномерно непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство Докажем методом от противного. Предположим, что $f(x)$ не равномерно непрерывна и построим последовательности x'_n, x''_2, которые приведут к противоречию.

Имеем

$$\exists \varepsilon > 0 \;\mid\; \forall \delta > 0 \quad \exists x', x'' \in X \;\mid\; |x' - x''| < \delta \quad \text{и} \quad |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon.$$

Надо найти число $\varepsilon_1 > 0$ и построить последовательности x'_n, x''_2 такие, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x'_n, x''_n \in [a, b], \quad |x'_n - x''_n| < \frac{1}{n}, \quad |f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon.$$

Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon$ и выбирая $\delta = 1/n$ будем брать полученные x' и x'' в качестве x'_n и x''_n.

Полученные последовательности x'_n и x''_n могут никуда не стремиться. Однако, по теореме Больцано — Вейерштрасса из одной из них, например, x'_n можно выбрать подпоследовательность x'_{n_k} сходящуюся к некоторой точке $c \in \mathbb{R}$. По теореме о пределе и неравенстве $c \in [a, b]$. По теоремам 18, 15 подпоследовательность x''_{n_k} имеет тот же предел:

Теорема 19 $\to$

Теоремы 11, 18, 15 $\to$

$$x''_{n_k} = (x''_{n_k} - x'_{n_k}) + x'_{n_k} \to c.$$

По непрерывности f

$$f(x'_{n_k}) \to f(c), \quad f(x''_{n_k}) \to f(c),$$

и значит,

$$f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k}) \to 0,$$

а это противоречит тому, что $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon$ по построению последовательностей x'_n и x''_n. **Теорема доказана.**

Замечание.. Как и в доказательстве теоремы Вейерштрасса ключевым моментом было то, что отрезок ограничен и замкнут. Это позволяет из произвольной последовательности выбирать подпоследовательность, сходящуюся к точке того же отрезка.

Как доказывать равномерную непрерывность?. 1. Если функция непрерывна и область определения — отрезок, то достаточно воспользоваться теоремой Кантора.

2. Если функция непрерывна и ее можно продолжить до непрерывной функции на отрезке, то снова можно использовать теорему Кантора.

3. Если функция имеет ограниченную производную, то она равномерно непрерывна (см. теорему Лагранжа в следующей главе).

4. Если функция непрерывна и область определения можно разбить на две части, на каждой из которых функция будет равномерно непрерывна, то она будет равномерно непрерывна и на всей области определения (это стоит доказать в качестве упражнения).

§ 6. Элементарные функции

К элементарным функциям мы будем относить:

- степенная функция $x \mapsto x^\alpha$;
- показательная функция $x \mapsto a^x$;
- тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$;
- обратные к ним;
- функции получающиеся из перечисленных при помощи алгебраических операций и композиции, примененных конечное число раз.

Элементарные функции и их основные свойства хорошо известны из школьного курса. В этом параграфе мы дадим их более или менее строго определение, докажем их непрерывность и установим некоторые асимптотические соотношения.

Заметим, что функции из первых четырех пунктов, характеризуются тем, что переводят сумму в сумму, сумму в произведение, произведение в произведение или же произведение в сумму, что отражается в хорошо известных формулах. Для тригонометрических функций сказанное приобретает смысл только в поле комплексных чисел, которое возникнет у нас позже.

6.1. Показательная функция.

Основная работа связана с определением степени a^x положительного числа a с произвольным вещественным показателем $x \in \mathbb{R}$.

Замечание о продолжении показательной функции по непрерывности.

Замечание о сложном проценте.

Теорема
о существовании $\exp(x)$
$\Downarrow$

Для любого $x \in \mathbb{R}$ существует предел

$$\exp(x) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n .$$

Доказательство

Шаг 1 (неравенство Бернулли). Для $x \geq -1$ и $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство Бернулли

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

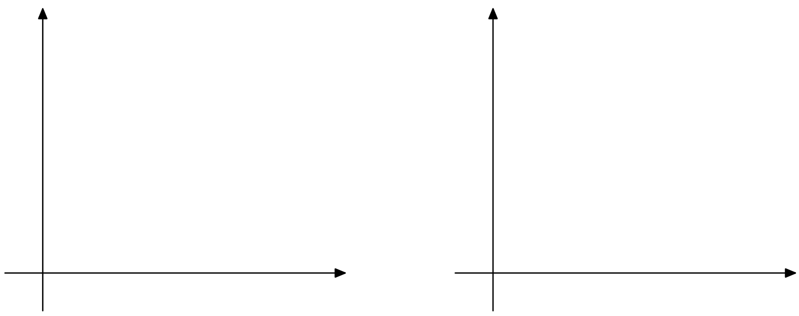
Докажем это при помощи математической индукции. Для $n = 1$ неравенство очевидно верно. Предположим, что оно уже доказано для некоторого n и докажем для $n + 1$:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) \\ &= 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x.\end{aligned}$$

Шаг 2 (неубывание последовательности $u_n(x) = (1+x/n)^n$). Докажем существование предела, пользуясь теоремой Вейерштрасса. Для этого нужно установить монотонность $u_n(x)$, хотя бы начиная с некоторого номера, который зависит от x, а также ограниченность.

Для фиксированного x будем рассматривать только номера $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющие условию $n > -x$. В этом случае $1 + \frac{x}{n} > 0$. Рассмотрим отношение $u_{n+1}(x)/u_n(x)$ при $n > -x$ и покажем, что оно не меньше 1:

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} &= \frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} \\ &= \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}-1\right)\right)^{n+1} = \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{(n+x)(n+1)}\right)^{n+1} \\ &\quad \text{(по неравенству Бернулли, заметим, что } -\tfrac{x}{(n+x)(n+1)} \geq -1 \text{ при } n > -x\text{)} \\ &\geq \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n+x}\right) = 1.\end{aligned}$$



(a) (b)

Шаг 3 (ограниченность $u_n(x)$). Рассмотрим последовательность

$$v_n(x) = \frac{1}{u_n(-x)} = \frac{1}{(1-\frac{x}{n})^n}.$$

По шагу 1,

$$\forall n > x \quad u_{n+1}(-x) \geq u_n(-x) > 0,$$

откуда

$$\forall n > x \quad 0 < v_n(x) \leq v_{n+1}(x).$$

Далее при $n > x$ и $n > -x$, т.е. $n > |x|$, обе последовательности $u_n(x)$ и $v_n(x)$ положительны и

$$\frac{u_n(x)}{v_n(x)} = \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right) \leq 1,$$

т. е.

$$u_n(x) \le v_n(x) \le v_{n_0(-x)}(x).$$

Теорема 16 → В итоге, при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}$ $u_n(x)$ ограничена, не убывает при $n > -x$, и значит, по теореме Вейерштрасса имеет конечный предел

$$\exp(x) = \lim u_n(x).$$

Теорема доказана.

Определение
экспоненциальной функции и числа e
⇓

В силу предыдущей теоремы на $\mathbb{R}$ определена функция

$$x \mapsto \exp(x),$$

которая называется *экспоненциальной функцией.*

Значение $\exp(1)$ называется *числом* e:

$$e = \exp(1) = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Теорема 36
основное свойство $\exp(x)$
⇓

$$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Доказательство

Шаг 1 ($(1 + x_n/n)^n \to 1$, если $x_n \to 0$). По определению предела

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \mid \ \forall n \ge n_0 \ -1 < x_n < 1.$$

В силу неравенства Бернулли для $n \ge n_0$ имеем

$$1 + x_n \le \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n \le \frac{1}{\left(1 - \dfrac{x_n}{n}\right)^n} \le \frac{1}{1 - x_n}.$$

Теорема ?? → Остается применить теорему о зажатой последовательности.

Шаг 2 ($(1 + x_n/n)^n \to \exp(a)$, если $x_n \to a$). Подбирая последовательность z_n, запишем $(1 + x_n/n)^n$ в виде

$$\left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n.$$

Легко проверить, что нужно взять

$$z_n = \frac{x_n - a}{1 + a/n}.$$

Поскольку $z_n \to 0$ по предыдущему шагу

$$\left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n = \underbrace{\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n}_{\to \exp(a)} \underbrace{\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n}_{\to 1} \to \exp(a).$$

Теорема ?? →

Шаг 3 ($\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$). Пользуясь известными свойствами предела и результатами предыдущих шагов, запишем

$$\exp(x)\exp(y) = \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{y}{n}\Big)^n = \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n\Big(1+\frac{y}{n}\Big)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{x+y+\frac{xy}{n}}{n}\Big)^n = \exp(x+y).$$

Теорема доказана.

Теорема 37
о свойствах функции $\exp(x)$
⇓
Теорема 39

Функция $\exp(x)$ обладает свойствами:

1. $\exp(x) > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$;
2. при рациональных $x = m/n$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, функция $\exp(x)$ совпадает с $e^x = \sqrt[n]{e^m}$;
3. функция $\exp(x)$ возрастающая и непрерывная;
4. функция $\exp(x)$ имеет следующее поведение на концах области определения:
$$\lim_{x\to-\infty}\exp(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\exp(x) = +\infty;$$
5. имеет место следующее соотношение, называемое замечательным пределом:
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1.$$

Доказательство

теорема 36 →

Шаг 1 (первые два свойства). По теореме 36

$$\exp(x)\exp(-x) = \exp(0) = 1,$$

откуда $\exp(x) \neq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Далее

$$\exp(x) = \exp(x/2)\exp(x/2) = \big(\exp(x/2)\big)^2 > 0.$$

теорема 36 →

Пусть $x = m/n$. Опять по теореме 36

$$\underbrace{\exp(1/n)\cdots\exp(1/n)}_{n \text{ раз}} = \exp(1) = e$$

и по определению корня степени n

$$\exp(1/n) = \sqrt[n]{e}.$$

Далее

$$\exp(m/n) = \big(\exp(1/n)\big)^m = \big(\sqrt[n]{e}\big)^m = \sqrt[n]{e^m}.$$

Шаг 2 (оценки для $\exp(x)$). Оставшиеся свойства получаются из оценок

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 + x \le \exp(x) \tag{$*$}$$

$$\forall x < 1 \quad \exp(x) \le \frac{1}{1-x}. \tag{$\dagger$}$$

Рисунок

Зафиксируем $x \in \mathbb{R}$. Выше (см. доказательство теоремы) было показано, что при $n > -x$ $u_n(x) \le u_{n+1}(x)$ и следовательно

$$u_n(x) \le \lim u_m(x) = \exp(x).$$

Применяя неравенство Бернулли (что возможно при $n > -x$), получаем

$$1 + x \le \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = u_n(x) \le \exp(x).$$

Для доказательства второго неравенства запишем первое для $-x$:

$$1 - x \le \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)},$$

и поменяем местами $1 - x$ и $\exp(x)$, заметив, что при $x < 1$ оба выражения положительны.

теорема 36 →

Шаг 3 (монотонность). В силу (∗) при $x < y$ будет

$$\exp(y) = \exp(x)\exp(y - x) \ge \exp(x)\underbrace{(1 + y - x)}_{>1} \ge \exp(x).$$

Шаг 4 (непрерывность). Докажем сначала непрерывность в точке $x = 0$. При $x < 1$ имеем

$$\frac{1}{1 - x} \le \exp(x) \le 1 + x,$$

??? →

Теоремы 26, 36 →

откуда $\lim_{x\to 0} \exp(x) = 1 = \exp(0)$. Непрерывность в произвольной точке $x = a$ обеспечивается следующим соотношением:

$$\exp(x) = \underbrace{\exp(x - a)}_{\to 1}\exp(a) \to \exp(a).$$

Шаг 4 (замечательный предел). Имеем

$$\frac{1}{1 - x} \le e^x \le 1 + x, \quad -1 < x < 1,$$

откуда

$$\frac{1}{1 - x} \le \frac{e^x - 1}{x} \le 1 \quad \text{при } x > 0,$$
$$1 \le \frac{e^x - 1}{x} \le \frac{1}{1 - x} \quad \text{при } x < 0.$$

Рисунок

Теоремы 12, 24 →

Это означает, что в (выколотой) окрестности нуля функция $\frac{e^x-1}{x}$ зажата между двумя функций, каждая из которых стремитсяя к 1 при $x \to 0$. Привлекая теорему о зажатой последовательности и эквивалентность определения предела по Гейне и Коши, заключаем, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Теорема доказана.

Замечание об обозначении $e^x = \exp(x)$.

6.2. Натуральный логарифм.

Определение
натурального логарифма
$\Downarrow$

Функция обратная к экспоненциальной функции $\exp(x)$ называется *натуральным логарифмом* и обозначается $\ln(x)$.

Замечание об обратимости $\exp(x)$.

Теорема 38
о свойствах функции $\ln(x)$
$\Downarrow$
Теорема 39

Функция $\ln(x)$ обладает следующими свойствами:

1. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$, $x, y > 0$;
2. функция $\ln(x)$ возрастающая и непрерывная;
3. на концах своей области определения $\ln(x)$ имеет следующее поведение:

$$\lim_{x\to+0} \ln x = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty;$$

4. имеет место следующее соотношение, называемое замечательным пределом:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1.$$

Доказательство

Шаг 1 (основное свойство). Положим $u = e^x$, $v = e^y$ (тогда $x = \ln u$, $y = \ln v$) и применим логарифм к тождеству $e^{u+v} = e^u e^v = xy$: $\ln x + \ln y = u + v = \ln(xy)$.

Шаг 2 (монотонность и непрерывность). Функция $\exp(x)$ возрастающая, значит, и $\ln(x)$, будучи обратной к ней, тоже строго возрастающая. Непрерывность $\ln(x)$ вытекает из теоремы о непрерывности монотонной функции, поскольку множество значений $\ln(x)$, которое совпадает с областью определения $\exp(x)$, — промежуток $\mathbb{R}$.

теоремы 31 $\rightarrow$

Шаг 3 (оценки для $\ln(x)$). Оставшиеся свойства получаются из неравенств

$$1 - \frac{1}{x} \le \ln x \le x - 1, \quad x > 0. \qquad (*)$$

Рисунок

Докажем их. Для $y = \ln(x)$, $x > 0$, имеем неравенство (см. доказательство теоремы 37)

$$1 + y \leq e^y.$$

В теримнах исходной переменной x оно принимает вид

$$1 + \ln(x) \leq x,$$

т. е. мы получаем правое неравенство в $(*)$ Записывая его для аргумента $1/x$, $x > 0$:

$$1 + \ln\frac{1}{x} \leq \frac{1}{x}$$

и пользуясь тем, что $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$ в силу шага 1, мы получаем и второе.

Шаг 4 (поведение на концах). Существование пределов следует из теоремы Теорема 28 → о пределе монотонной функции, а тот факт, что они бесконечны из того, что множество значений $\ln(x)$ неограничено с обеих сторон.

Шаг 5 (замечательный предел). Подставляя в $(*)$ $x+1$ вместо x, получаем

$$1 - \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) \leq x, \quad x > -1,$$

откуда

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{\ln(x+1)}{x} \leq 1 \quad \text{при } x > 0,$$
$$1 \leq \frac{\ln(x+1)}{x} \leq \frac{1}{x+1} \quad \text{при } x < 0.$$

Рисунок

Это означает, что в (выколотой) окрестности нуля функция $\frac{\ln(x+1)}{x}$ зажата между двумя функций, каждая из которых стремитсяя к 1 при $x \to 0$. ПриТеоремы 12, 24 →влекая теорему о зажатой последовательности и эквивалентность определения предела по Гейне и Коши, заключаем, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1.$$

Теорема доказана.

6.3. Показательная функция с произвольным основанием и степенная функция.

Замечание о показательной функции.

Определение
показательной функции
с произвольным основанием
⇓

Для $a > 0$ определим показательную функцию $x \mapsto a^x$ на $\mathbb{R}$ следующим образом
$$a^x = \exp(x \ln a).$$

Определение
степенной функции
⇓

Для $\alpha \in \mathbb{R}$ определим степенную функцию $x \mapsto x^\alpha$ на $(0, +\infty)$ следующим образом
$$x^\alpha = \exp(\alpha \ln x).$$

Пользуясь свойствами показательной функции легко проверить, что в случае $\alpha \in \mathbb{Q}$ определенная нами функция x^α совпадает со степенной функцией, которая определяется в школьном курсе математики. Кроме того, используя подходящее продолжение (четное или нечетное) в некоторых случаях можно доопределить x^α на большее множество: при $\alpha = 1, 2, \dots$ — на $\mathbb{R}$, при $\alpha = 1-, -2, \dots$ — на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. При некоторых $\alpha \in \mathbb{Q}$ также можно расширить область определения x^α; например, при $\alpha = 1/3$ функция $x^{1/3}$ естественно определяется на всем $\mathbb{R}$.

Теорема 39
о свойствах степенной функции
⇓

(1) Степенная функция x^α непрерывна.

(2) Имеет место следующее соотношение именуемое замечательным пределом:
$$\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^\mu - 1}{x} = \mu.$$

Теорема 30 →

Доказательство Степенная функция определена как композиция непрерывных функций, и значит непрерывна на основании теоремы 30.

По определению степенной функции при $x \to 0$ имеем

Теоремы 26, 38 →

$$\frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \frac{\exp(\mu \ln(1+x)) - 1}{x}$$
$$= \underbrace{\frac{\exp(\mu \ln(1+x)) - 1}{\mu \ln(1+x)}}_{\to 1} \underbrace{\frac{\mu \ln(1+x)}{x}}_{\to \mu} \to \mu.$$

Теорема 27 →
Теорема 37 →

Первый сомножитель стремится к 1 на основании теоремы о пределе композиции, поскольку $y = \mu \ln(1+x) \to 0$ при $x \to 0$ и $y \neq 0$ при $x \neq 0$, а $\lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$.
Теорема доказана.

6.4. Тригонометрические функции.

Определение тригонометрических функций геометрическое.

Определение
тригонометрических функций
$\Downarrow$

Косинус $\cos x$ и *синус* $\sin x$ вещественного числа $x \in \mathbb{R}$ определяются как абсцисса и ордината точки на единичной окружности, которая получается из точки $(1, 0)$ после того, как она проходит по окружности путь x против часовой стрелки, если $x \geq 0$ и путь $|x|$ по часовой стрелке, если $x < 0$.

Тангенс $\operatorname{tg} x$ и котангенс $\operatorname{ctg} x$ определяются как отношения

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

с естественными областями определения.

Теорема 40
о свойствах тригонометрических функций
$\Downarrow$

1. Тригонометрические функции $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ непрерывны.
2. Имеет место следкющее соотношение, называемое замечательным пределом:
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Доказательство

Шаг 1 (оценка для $\sin x$ и замечательные предел). Докажем неравенство

$$\cos^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1 \text{ при } 0 < |x| < \frac{\pi}{2}. \tag{$*$}$$

В силу четности входящих сюда фукнций достаточно сделать это при $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Площадь сектора ODC меньше площади треугольника ABO:

$$\pi \cos^2 x \, \frac{x}{2\pi} < \frac{1}{2} \sin x \quad \longrightarrow \quad \cos^2 x < \frac{\sin x}{x} \text{ при } 0 < |x| < \frac{\pi}{2},$$

и мы получаем левое неравенство в $(*)$. Правое неравенство получается в результате сравнения площадей треугольников ABO и сектора ABO:

$$\frac{1}{2} \sin x < \pi \frac{x}{2\pi} \quad \longrightarrow \quad \sin x < x.$$

Теоремы 12, 24 $\rightarrow$

Замечательный предел получается из неравенства $(*)$ стандартным образом с использованием теорем 12, 24.

Шаг 2 (непрерывность). Из неравенства $(*)$ и известного тождества

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x - y}{2} \cos \frac{x + y}{2}$$

получается неравенство

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|,$$

которое очевидно влечет непрерывность функции $\sin x$. Непрерывность функции $\cos x$ доказывается аналогично с использованием тождества

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2}.$$

Теорема 30 →

Функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ непрерывны как композиции непрерывных функций. **Теорема доказана.**

6.5. Асимптотические сравнения.

Что такое асимптотика?. Рассмотрим график функции $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Хорошо, известно, что график этой функции неограниченно приближается к прямым $y = x$ и $x = 0$, когда $x \to +\infty$ и $x \to +0$. При этом говорят, что эти прямые являются асимптотами функции $f(x)$. Отметим особенности этого стремления:

1. Увеличивая x можно сделать соответствующие точки графиков сколь угодно близкими.
2. При этом график $f(x)$ никогда не достигает прямой $y = x$.
3. Функция $y = x$ проще функции $f(x)$.

Именно вторая особенность объясняет происхождение термина асимптота (от греческого $\alpha\sigma\upsilon\mu\pi\tau\omega\tau o\varsigma$ (асимптотос), что означает непересекающийся, невстречающийся). Однако, используя слова асимптота, асимптотический, математики имеют в виду остальные две особенности, т. е. предельные свойства. Иначе говоря, выяснить асимптотическое поведение (или просто асимптотику) функции $f(x)$ при $x \to a$ значит представить ее в виде

$$f(x) = \text{простая функция} + \text{нечто малое, когда } x \to a.$$

В случае $f(x) = x + 1/x$, когда $x \to +\infty$, роль простой функции играет x, а роль малого — второе слагаемое $1/x$. Когда же $x \to +0$ они меняются. Так что к чему стремится x важно.

Что такое простая функция более или менее понятно. У нас это будет как правило полином. А вот понятие «нечто малое» требует строгого определения и опирается на понятие асимптотического сравнения.

Определение
асимптотических сравнений
o-малое и O-большое
⇓

Пусть $f, g : X \to \mathbb{R}$ и a — предельная точка X.

Говорят, что функция $f(x)$ — *o-малое от $g(x)$ при $x \to a$* и пишут $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$, если

$$f(x) = \alpha(x)g(x), \quad \text{где } \alpha(x) \to 0 \text{ при } x \to a.$$

Говорят, что функция $f(x)$ — *O-большое от $g(x)$ при $x \to a$* и пишут $f(x) = O(g(x))$, $x \to a$, если

$$f(x) = \beta(x)g(x), \quad \text{где } \beta(x) \text{ ограничена в окрестности } a.$$

Комментарии.

Примеры.

Теорема 41
правила работы
с o-малым и O-большим
$\Downarrow$

Выражения с o-малыми и O-большими можно преобразовывать по следующим правилам, в которых равенство означает, что левую часть можно заменить на правую (но не наоборот):

1. $o(f) = O(f)$;
2. $o(f) + o(f) = o(f)$; $\quad O(f) + O(f) = O(f)$;
3. $o(o(f)) = o(f)$; $\quad O(O(f)) = O(f)$;
4. $O(o(f)) = o(f)$; $\quad o(O(f)) = o(f)$;
5. $f \cdot o(g) = o(fg)$; $\quad f \cdot O(g) = O(fg)$;

при условии, что все асимптотические сравнения относятся к одной и той же точке.

Доказательство

Шаг 1. Пусть $h(x) = o(f)$ при $x \to a$. По определению $h(x) = \alpha(x)f(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$. Функция $\alpha(x)$ ограничена в некоторой окрестности a. Значит опять по определению $h(x) = O(f)$ при $x \to a$.

Теорема 26 $\rightarrow$

Шаг 2. Пусть $h(x) = o(f) + o(f)$ при $x \to a$. По определению

$$h(x) = \underbrace{\alpha_1(x)}_{\to 0} f(x) + \underbrace{\alpha_2(x)}_{\to 0} f(x) = \underbrace{(\alpha_1(x) + \alpha_2(x))}_{\to 0} f(x) = o(f), \quad x \to a.$$

Теорема 26 $\rightarrow$

Шаг 3. Пусть $h(x) = o(o(f))$ при $x \to a$. По определению

$$h(x) = \underbrace{\alpha_1(x)}_{\to 0} g(x), \quad \text{где} \quad g(x) = \underbrace{\alpha_2(x)}_{\to 0} f(x),$$

откуда

$$h(x) = \underbrace{(\alpha_1(x)\alpha_2(x))}_{\to 0} f(x) = o(f), \quad x \to a.$$

Остальное аналогично. **Теорема доказана.**

Теорема 42
о сравнении показательной, степенной и логарифмической функций
$\Downarrow$

Пусть $a > 1$ и $\alpha > 0$. Тогда

1. $\frac{x^\alpha}{a^x} \to 0$, т. е. $x^\alpha = o(a^x)$ при $x \to +\infty$;
2. $\frac{a^{-x}}{x^{-\alpha}} \to 0$, т. е. $a^{-x} = o(x^\alpha)$ при $x \to +\infty$;
3. $\frac{\log_a x}{x^\alpha} \to 0$, т. е. $\log_a x = o(x^\alpha)$ при $x \to +\infty$;
4. $x^\alpha \log_a x \to 0$, при $x \to +0$.

Доказательство

Шаг 1 ($x^\alpha/a^x \to 0$). Ввиду оценки

$$0 < \frac{x^\alpha}{a^x} < \frac{x^n}{a^x} = \left(\frac{x}{q^x}\right)^n, \quad x > 1,$$

где $n \in \mathbb{N}$, $n > \alpha$, $q = a^{1/n}$, достаточно доказать, что

$$\frac{x}{q^x} \to 0 \quad \text{при } x \to +\infty.$$

В свою очередь в силу оценок

$$\frac{1}{q}\ \frac{[x]}{q^{[x]}} \le \frac{x}{q^x} \le \frac{[x]+1}{q^{[x]+1}}\ q,$$

достаточно доказать. что

$$x_n = \frac{n}{q^n} \to 0.$$

Покажем, что x_n убывает. Действительно,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{n}\frac{1}{q} \to \frac{1}{q} < 1.$$

Теорема 11 → По теореме о пределе и неравенстве,

$$\exists n_0 \ \mid\ \forall n \ge n_0 \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1,$$

Теорема 16 → т. е. последовательность x_n строго убывает начиная с n_0 и по теореме Вейерштрасса имеет предел, значение которого можно найти переходя к пределу в

Теорема 11 → равенстве

$$x_{n+1} = \frac{n+1}{n}\ \frac{1}{q}\ x_n.$$

Очевидно, $\lim x_n = 0$.

Соотношение $\frac{a^{-x}}{x^\alpha} \to 0$, $x \to +\infty$, очевидно эквивалентно доказанному.

Шаг 2 ($\log_a x/x^\alpha \to 0$). Сделаем замену, при которой x^α перейдет в a^y, т. е.

Теорема 27 → $x = a^{y/\alpha}$. Тогда $x \to +\infty \iff y \to +\infty$ и

$$\frac{\log_a x}{x^\alpha} = \frac{y/\alpha}{a^y} \to 0, \quad y \to +\infty.$$

по Шагу 1.

Теорема 27 → **Шаг 3 ($x^\alpha \log_a x \to 0$).** Сделаем замену $x = 1/t$:

$$x^\alpha \log_a x = \frac{1}{t^\alpha}\log_a\frac{1}{t} = -\frac{\log_a t}{t^\alpha} \to 0, \quad t \to +\infty,$$

по Шагу 2. **Теорема доказана.**

Определение
главной части
⇓

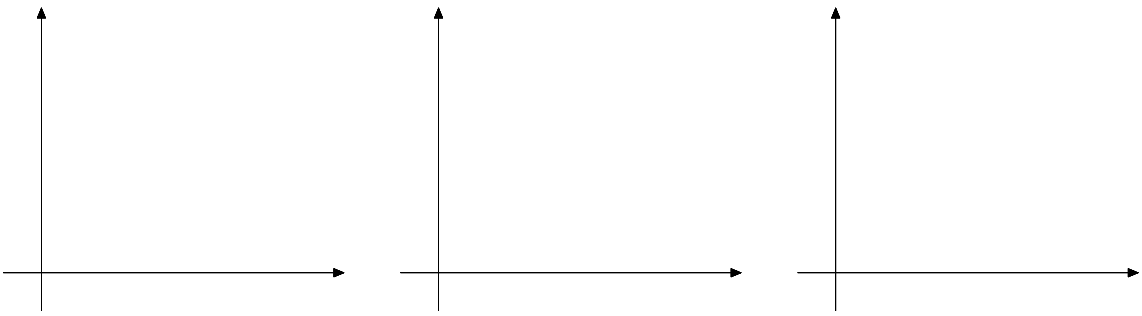
Пусть $f, g : X \to \mathbb{R}$ и a — предельная точка X. Функцию $g(x)$ называют *главной частью* $f(x)$ при $x \to a$ и пишут $f(x) \sim g(x)$, $x \to a$, если

$$f(x) = g(x) + o(g(x)) \quad \text{при } x \to a.$$

Комментарии.
Запись при помощи отношения.
Отношение эквивалентности.

Теорема 43
о главных частях
элементарных функций
$\Downarrow$

$$e^x = 1 + x + o(x), \quad x \to 0;$$
$$\ln(x+1) = x + o(x), \quad x \to 0;$$
$$\sin x = x + o(x), \quad x \to 0;$$
$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + o(x), \quad x \to 0.$$



(a) (b) (c)