
1. Предел и непрерывность функций одной переменной

1. ОБЩЕМАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

Высказывания
Способы построения высказываний
Обратное утверждение
Предложения с переменными и кванторы
Запись высказываний с кванторами
Отрицание
Теорема и доказательство

2. Вещественные числа

Вещественное число — десятичная дробь
Для чего нужна полнота
Теорема 1 (Дедекинда о полноте числовой прямой)
Теорема 2 (принцип вложенных отрезков)
Доказательство
Важно, что отрезок
Определение верхней границы
Определение наибольшего элемента
В чем разница между верхней границей и наибольшим элементом
Теорема 3 (о существовании наименьшей верхней границы)
Доказательство

Определение точной верхней границы
Определение расширенной числовой прямой
Теорема 4 (о точных границах в $\overline{\mathbb{R}}$)
Доказательство
Теорема 5 (критерий точной верхней границы)
Доказательство

3. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА

Определение последовательности
 Δ **Определение предела последовательности**
Как понимать определение предела последовательности
О единственности предела
Определение последовательности, стремящейся к $\pm\infty$

3.2. ПРЕДЕЛ, НЕРАВЕНСТВО И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

Теорема 6 (о пределе и неравенстве)
Док-во
Теорема 7 (о зажатой последовательности)

Док-во

Теорема 8 (об ограниченности сходящейся последовательности)

Доказательство

Теорема 9 (о бесконечно малых)

Доказательство

Теорема 10 (о пределе и арифметических операциях)

Доказательство (для суммы и произведения)

3.3. Подпоследовательности и частичные пределы

△ **Определение подпоследовательности и частичного предела**

Комментарии и примеры

Теорема 11 (о пределе подпоследовательности)

Доказательство

△ **Теорема 12 (Больцано — Вейерштрасса о подпоследовательности)**

Доказательство

3.4. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ

Теорема 13 (Вейерштрасса о монотонной последовательности)

Доказательство

△ **Определение фундаментальной последовательности**

△ **Теорема 14 (критерий Коши)**

Доказательство

Отрицание условия Коши

4. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Определение предельной точки

Смысл определения

Предельная точка может как принадлежать так и не принадлежать множеству

Термин «точка сгущения» для конечной точки. Термин «предельная точка» универсальный

△ **Определение конечного предела функции в точке сгущения**

Примеры

Определение односторонних пределов функции в точке сгущения

Примеры

Если односторонние пределы равны, то существует обычный предел

Определение конечного предела функции в бесконечной точке

Предел последовательности — частный случай предела функции

Определение бесконечного предела в точке сгущения

Определение окрестности и проколотовой окрестности

Определение предельной точки на языке окрестностей

Определение предела функции на языке окрестностей

Теорема 15 (эквивалентность определений предела по Гейне и по Коши)

Доказательство

Теорема 6' (о предельном переходе в неравенстве)
Следствие (о единственности предела)
Теорема 10' (о пределе и алгебраических операциях)
Теорема 7' (о зажатой функции)
Теорема 14' (критерий Коши для функций)
Теорема 16 (о пределе композиции)
Доказательство

5. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ И ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Замечание (о сложном проценте)
Теорема 17 (о существовании предела последовательности $(1 + x/n)^n$)
Доказательство
△ Определение функции $\exp(x)$ и числа e
Теорема 18 (о свойствах $\exp(x)$ и замечательном пределе)

Доказательство (замечательного предела)
Определение натурального логарифма
Теорема 19 (о свойствах натурального логарифма)
Доказательство
Теорема 20 (замечательный предел для степенной функции)
Доказательство
Теорема 21 (первый замечательный предел)
Доказательство

6. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СРАВНЕНИЯ

△ Определение асимптотических сравнений: o -малое и O -большое
Замечание. o -малое и O -большое — это некоторые функции ...
Замечание. $o(1)$ — бесконечно малая, $O(1)$ — локально ограниченная функция
Пример. $x^2 = o(x)$, $x \rightarrow 0$
Пример. $x = o(x^2)$, $x \rightarrow +\infty$

Теорема 22 (о преобразовании выражений с o -малыми и O -большими)
Доказательство
△ Теорема 23 (о сравнении степенной, показательной и логарифмической функций)
Доказательство
△ Определение главной части
Комментарии к определению
Теорема 24 (о главных частях элементарных функций)
Доказательство
7. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ
△ Определение непрерывной функции
Комментарии к определению непрерывной функции

Классификация разрывов

Замечание о непрерывности элементарных функций

Теорема 25 (о непрерывности суммы, разности, произведения, отношения, композиции)

△ **Теорема 26 (Больцано — Коши о промежуточных значениях)**

Доказательство

Замечания о теореме

△ **Теорема 27 (Вейерштрасса о наибольшем и наименьшем значениях)**

Доказательство

Замечания о теореме