

III. Интеграл

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА РИМАНА И ЕГО СВОЙСТВА

Определение разбиения

Определение интеграла Римана

Как понимать предел интегральных сумм

О геометрической интерпретации

Определение сумм Дарбу

Теорема 1 (критерий Дарбу)

Замечание. Ограниченность функции — необходимое условие интегрируемости

Пример. Функция Дирихле — пример неинтегрируемой функции

Теорема 2 (о линейности и аддитивности интеграла)

Теорема 3 (об интегрируемости (кусочно) непрерывной функции и монотонной функции)

Лекция 19 /

Теорема 4 (о монотонности интеграла)

Теорема 5 (первая теорема о среднем)

Док-во

Геометрический смысл теоремы о среднем в случае $g(x) = 1$

Оценивание интегралов при помощи теоремы о среднем

2. ИНТЕГРАЛ И ПЕРВООБРАЗНАЯ

Об интеграле в случае $a > b$

Теорема 6 (об интеграле и первообразной)

Док-во

Замечание. Непрерывность важна.

Теорема 7 (формула Ньютона — Лейбница)

Док-во

Формула Ньютона — Лейбница — средство вычисления интегралов

Теорема 8 (формула Тейлора с интегральным остаточным членом)

Док-во

Следствие. Остаточный член в форме Лагранжа

3. НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Определение несобственного интеграла для бесконечной и конечной точки

Замечание (о сходимости)

Лекция 20 /

Замечание (о значении несобственного интеграла и формуле Ньютона — Лейбница)

Замечание (о причинах сходимости)

Определение абсолютной и условной сходимости несобственного интеграла

Теорема 9 (критерий Коши сходимости несобственного интеграла)

Замечание о пределе в случае несобственного интеграла

Док-во

Теорема 10 (о сходимости абсолютно сходящегося интеграла)

Док-во

Теорема 11 (об интегрировании основных особенностей)

Док-во

Теорема 12 (мажорантный признак и теорема сравнения для несобственных интегралов)

Обновлено 8 января 2015 г.

Док-во

Примеры на мажорантный признак и теорему сравнения

Теорема 13 (признаки Абеля и Дирихле сходимости несобственного интеграла)

Лекция 21 /

Док-во

Пример ($\int \sin x/x dx$)

Случай нескольких особенностей

Пример несобственного интеграла с несколькими особенностями

Когда сходится $\int_0^\infty dx/x^a$?

Сходимость в смысле главного значения

4. ЭЙЛЕРОВЫ ИНТЕГРАЛЫ: ГАММА-ФУНКЦИЯ И БЕТА-ФУНКЦИЯ

Определение Г-функции и В-функции

Теорема 14 (об основных свойствах Г-функции и В-функции)

Лекция 22 /

Док-во

График гамма-функции

Формула Стирлинга

Пример. Вычисление интеграла Эйлера — Пуассона

Пример. Интеграл $\int_0^{\pi/2} \sin^a x \cos^b x dx$

5. ПРИМЕРЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛА

Замечание об аддитивности площади и интеграла

Площадь криволинейной трапеции

Пример. Площадь эллипса

Площадь фигуры в полярных координатах

Масса и центр масс стержня

Второй момент и момент инерции стержня

Объем тел вращения

Пример. Объем шара

Лекция 23 /

Гладкая кривая, длина кривой

Теорема 15 (о длине кривой)

Док-во

Длина графика

Длина кривой в полярных координатах

Пример. Длина дуги эллипса. Эллиптический интеграл второго рода

Глава IV. Числовые ряды

1. СХОДИМОСТЬ РЯДА

Определение ряда, частичных сумм, сходящегося ряда

Теорема 1 (критерий Коши сходимости числового ряда)

Док-во

Теорема 2 (необходимое условие сходимости ряда)

Док-во

Замечание. У несобственного интеграла аналогичного условия нет

Определение абсолютно и условно сходящегося ряда

Теорема 3 (абсолютно сходящийся ряд сходится)

Док-во

Обновлено 8 января 2015 г.

2. АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДОВ

Теорема 4 (мажорантный признак и теорема сравнения для рядов)

Док-во

Лекция 24 /

Теорема 5 (интегральный признак сходимости ряда)

Док-во

Теорема 6 (о сходимости эталонных рядов)

Док-во

Пример (гармонический ряд расходится)

Теорема 7 (признак Коши сходимости ряда)

Док-во

Теорема 8 (признак Даламбера сходимости ряда)

Док-во

Пример $\sum x^n/n^n$

Пример $\sum x^n/n!$

Замечание (еще раз о ряде Тейлора)

3. УСЛОВНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДОВ

Теорема 9 (признаки Абеля и Дирихле сходимости ряда)

Лекция 25 /

Док-во

Пример ($\sum \sin nx/n$)

Глава V. Дифференциальное исчисление функций многих переменных

1. \mathbb{R}^n КАК НОРМИРОВАННОЕ ПРОСТРАНСТВО

Определение арифметического пространства \mathbb{R}^n

Замечание о модуле

Определение метрики и метрического пространства

Примеры расстояний: клетчатая бумага, рукопожатия

Определение нормы и нормированного пространства

Замечание. Норма определяет метрику, но не всегда метрика определяется нормой.

Определение основных норм и метрик в \mathbb{R}^n : l_1, l_2, l_∞, l_p

Связь стандартного скалярного произведения с евклидовой нормой

Теорема 1 (о связи норм l_1, l_2, l_∞)

Док-во

Определение открытого и замкнутого шара нормы

Лекция 26 /

Примеры (шары в разных нормах в \mathbb{R}^2)

Геометрический смысл Теоремы 1

Теорема 2 (об эквивалентности норм в \mathbb{R}^n)

Теорема 3 (неравенства Коши — Буняковского и Минковского)

Док-во

Определение внутренней, внешней, граничной и предельной точек, внутреннейности, внешности, границы и замыкания

Примеры. Открытый и замкнутые шары, сфера, $\mathbb{R}^n, \mathbb{Q}^n$

Определение открытого и замкнутого множества

Примеры. Открытый и замкнутые шары, сфера, $\mathbb{R}^n, \mathbb{Q}^n$

Определение ограниченного множества

Определение компакта

Определение связного множества и области

Определение предела последовательности в \mathbb{R}^n

Замечание о независимости сходимости от нормы

Замечание о покомпонентной сходимости

Определение предела отображения в \mathbb{R}^n

Замечание о сходимости координатных функций

Определение непрерывной функции в \mathbb{R}^n

Замечание о теореме Больцано — Коши (промежуток \rightarrow область)

Замечание о теореме Вейерштрасса (отрезок \rightarrow компакт)

2. ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Определение линейного отображения и функционала

Примеры линейного отображения:

1. Умножение на матрицу

2. Умножение на вектор

3. Дифференцирование в пространстве полиномов

4. Определенный интеграл

5. Скалярное произведение и норма

6. Закон Ома

Матрица линейного отображения

Замечание. Оператор отождествляется с матрицей в случае \mathbb{R}^n и стандартного базиса

Пример. дифференцирование в пространстве полиномов

3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Примеры функций из \mathbb{R}^b в \mathbb{R}^m

Определение дифференциала

Замечание о внутренней точке в определении

Замечание. Дифференцируемая функция непрерывна.

Определение частной производной и матрицы Якоби

Пример частной производной

Теорема 4 (о связи дифференциала с частными производными)

Доказательство

Пример недифференцируемой функции с частными производными

О записи $df(x) = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$

Теорема 5 (о дифференцировании и алгебраических операциях)

Теорема 6 (о дифференцировании композиции, цепное правило)

Док-во

Определение производной по вектору

Определение градиента функции

Вид градиента в декартовых координатах

Геометрический смысл градиента

4. СТАРШИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Определение старших производных

Пример. Смешанные производные $f(x, y) = \arctg(y/x)$.

Обновлено 8 января 2015 г.

Теорема 7 (о перестановочности частных производных)

Без док-ва

Определение класса $C^k(\Omega)$

Лекция 30 /

Теорема 8 (формула Тейлора)

Док-во

Определение второго дифференциала и матрицы Гессе

5. ЛОКАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

Определение локального экстремума

Определение критической точки

Теорема 9 (необходимое условие локального экстремума)

Док-во

Теорема 10 (достаточное условие локального экстремума)

Замечание о квадратичных формах

Лекция 31 /

Док-во

Пример полуопределенной формы

Метод наименьших квадратов