

Обновлено 7 мая 2015 г.

VII. Анализ на многообразиях в \mathbb{R}^n

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МНОГООБРАЗИЯ В \mathbb{R}^n

Определение элементарного гладкого многообразия в \mathbb{R}^n

Пример 1. Гладкая кривая

Зачем условие взаимной однозначности

Зачем условие непрерывности обратного отображения

Зачем условие максимального ранга

Пример 2. График функции одной переменной — элементарная кривая

Пример 3. Элементарная гладкая поверхность

Пример 4. График функции двух переменных — элементарная поверхность

Пример 5. Окружность — не элементарная кривая

Определение гладкого многообразия (с краем и без) в \mathbb{R}^n

Пример 6. Окружность — многообразие

Пример 7. Верхняя половина сферы с экватором — многообразие

Теорема 1 (о крае многообразия)

Пояснение

Край и граница

Теорема 2 (о задании многообразия системой уравнений)

Док-во (Случаи $n = 3, m = 1, 2$)

Замечание о нескольких параметризациях

Теорема 3 (об эквивалентности параметризаций)

Пояснение

Определение касательного вектора и касательного пространства к многообразию

Теорема 4 (о касательном пространстве)

Пример 8. Касательное пространство к параболоиду

Теорема 5 (о касательном пространстве неявно заданного многообразия)

Доказательство

Пример 9. Касательное пространство и касательная плоскость к эллипсоиду

2. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

Постановка задачи нахождения условного экстремума

Определение (локального) условного экстремума

Теорема 6 (принцип множителей Лагранжа)

Док-во

Пример 1. $f(x, y) = x^4 + y^4, F(x, y) = xy - 1 = 0$

Теорема 7 (о достаточных условиях условного экстремума)

3. ИНТЕГРАЛ ПО МНОГООБРАЗИЮ

Определение интеграла по многообразию

Объяснения к определению интеграла по многообразию

Случай $k = n$

Случай $k < n$

Интеграл вдоль кривой и элемент длины

Элемент длины в полярных координатах

Интеграл по поверхности

Элемент площади на сфере в декартовых и сферических координатах

Теорема 8 (о независимости интеграла от параметризации)

Док-во

4. ОРИЕНТАЦИЯ

Замечание об интегралах первого и второго рода

Определение ориентации векторного пространства

Определение ориентации порожденной параметризацией

Определение ориентации на многообразии

Обновлено 7 мая 2015 г.

Ориентируемые и неориентируемые многообразия. Лист Мебиуса

Определение согласованных параметризаций

Определение внешней нормали к краю многообразия

Определение индуцированной ориентации края

Пример 1. Естественная и индуцированная ориентации $\partial\mathbb{H}^k$

Пример 2. Индуцированная ориентация на сфере как на крае шара

Пример 3. Индуцированная ориентация на окружности как на крае полусферы

Определение внешней нормали к $(n - 1)$ -мерному многообразию

Ориентация $(n - 1)$ -мерного многообразия при помощи указания внешней нормали

Пример 4. Правило буравчика

Касательный вектор и нормаль к ориентированной кривой

Вычисление работы поля вдоль кривой

Вычисление потока поля через кривую

Выражение внешней нормали через параметризацию

Геометрический смысл объектов, связанных с нормалью

Вычисление потока через поверхность

5. КЛАССИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ

Определение носителя функции

Примеры.

Теорема 9 (многомерный аналог формулы Ньютона — Лейбница)

Док-во

Замечание о компактности

Теорема 10 (формула Гаусса — Остроградского)

Док-во

Теорема 11 (формула Грина)

Док-во

Теорема 12 (формула Стокса)

Док-во

6. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

Замечание о разложении по стандартному базису

Определение градиента, ротора, дивергенции, лапласиана

Определение оператора Гамильтона (набла)

Физический смысл формулы Гаусса — Остроградского и дивергенции

Физический смысл формулы Стокса и ротора

Определение потенциального векторного поля

Теорема 13 (о потенциальных полях)

Док-во

Замечание о кусочно гладких границах

Определение соленоидального и бездивергентного векторного поля

Теорема 14 (о соленоидальных полях)

Док-во

Пример 1. Электростатическое поле точечного заряда

Пример 2. Магнитное поле бесконечного прямого проводника с током